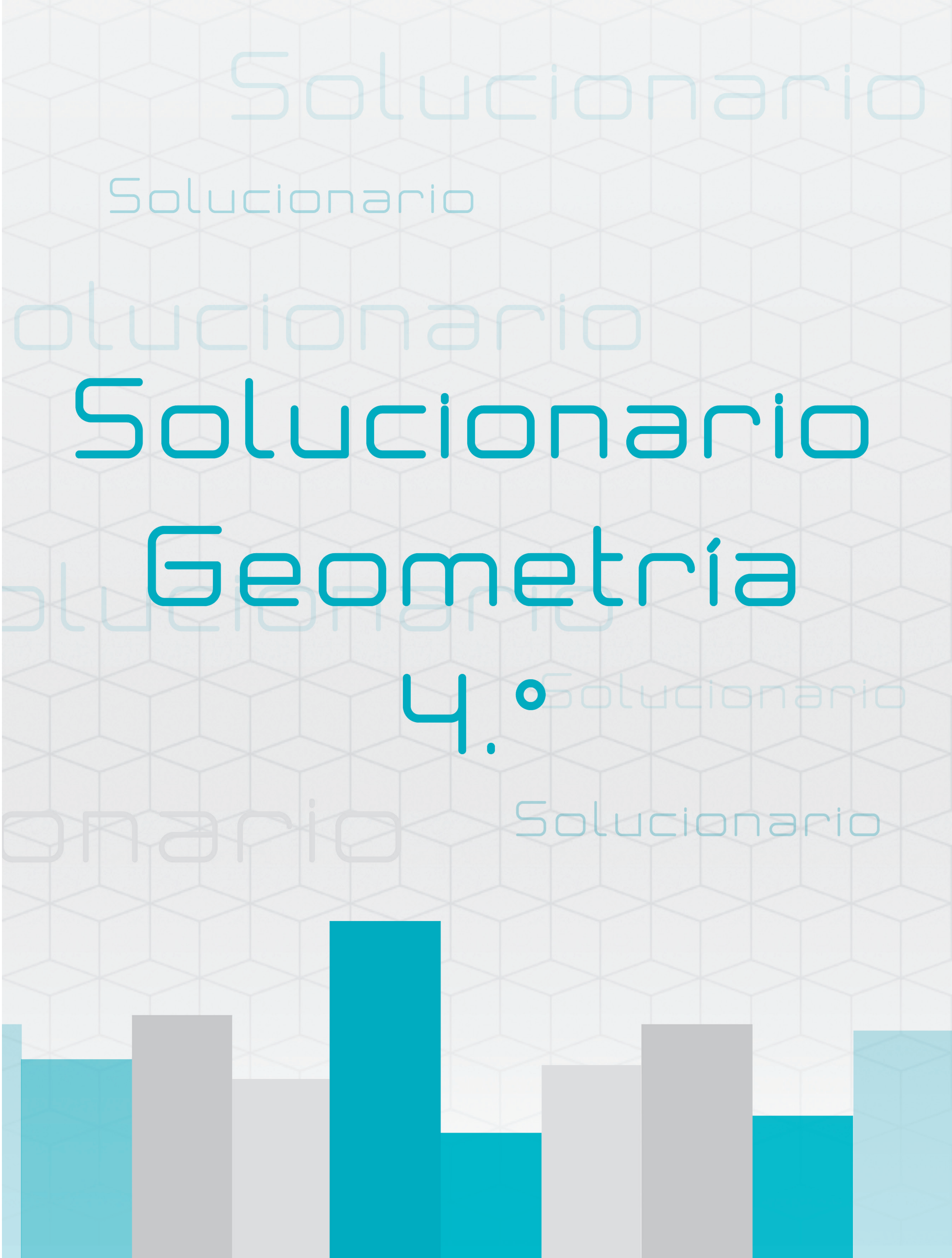
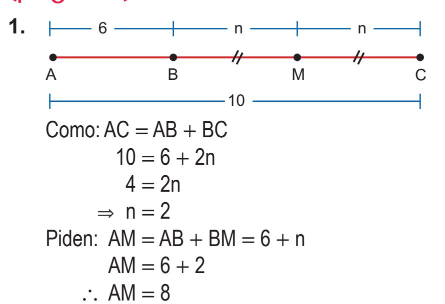


Solucionario Geometría 4.°

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 6) Unidad 1

1.



Como: $AC = AB + BC$

$10 = 6 + 2n$

$4 = 2n$

$\Rightarrow n = 2$

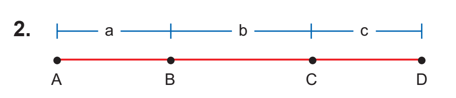
Piden: $AM = AB + BM = 6 + n$

$AM = 6 + 2$

$\therefore AM = 8$

Clave B

2.



Según el dato:

- $3AC + 2AB = 8$

$3(a + b) + 2a = 8$

$5a + 3b = 8 \quad ...(1)$

- $3CD + 2BD = 7$

$3c + 2(b + c) = 7$

$5c + 2b = 7 \quad ...(2)$

Sumando (1) y (2):

$(5a + 3b) + (5c + 2b) = 8 + 7$

$5(a + b + c) = 15$

$\Rightarrow a + b + c = 3$

Piden: $AD = a + b + c$

$\therefore AD = 3$

Clave C

3. Según el dato:

$\frac{BC}{CD} = \frac{2}{7} \Rightarrow BC = 2k \wedge CD = 7k$

5 — 2k — 7k; A B C D; 32

Del gráfico:

$AD = AB + BC + CD$

$32 = 5 + 2k + 7k$

$27 = 9k$

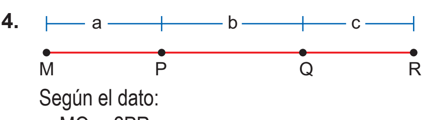
$\Rightarrow k = 3$

Piden: $AC = AB + BC = 5 + 2k$

$\therefore AC = 5 + 6 = 11$

Clave D

4.



Según el dato:

$MQ = 2PR$

$a + b = 2(b + c)$

$a + b = 2b + 2c$

$\Rightarrow a = b + 2c \quad ...(1)$

También:

$MP - QR = 12$

$\Rightarrow a - c = 12 \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$(b + 2c) - c = 12$

$\Rightarrow b + c = 12$

Piden: $PR = b + c$

$\therefore PR = 12$

Clave D

5.

45; M N P Q; a — b — a

Según el dato:

$MN = 2NP$

$a = 2b \quad ...(1)$

Del gráfico:

$MQ = 45$

$MN + NP + PQ = 45$

$a + b + a = 45$

$2a + b = 45 \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$2(2b) + b = 45$

$5b = 45 \Rightarrow b = 9$

Reemplazando $b = 9$ en (1):

$\Rightarrow a = 18$

Piden:

$MP = MN + NP = a + b$

$\therefore MP = 18 + 9 = 27$

Clave C

6. Según el dato:

$\frac{3}{AB} = \frac{5}{BC} = \frac{7}{CD} = \frac{8}{DE} = k$

$\Rightarrow AB = \frac{3}{k}; BC = \frac{5}{k}; CD = \frac{7}{k}$ y $DE = \frac{8}{k}$

A B C D E; 3/k — 5/k — 7/k — 8/k

Además:

$AB + BC = 70$

$\frac{3}{k} + \frac{5}{k} = 70 \Rightarrow k = \frac{4}{35}$

Piden:

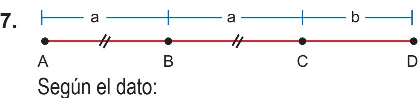
$BD = BC + CD = \frac{5}{k} + \frac{7}{k} = \frac{12}{k}$

$BD = \frac{12}{\left(\frac{4}{35}\right)} = \frac{(12)(35)}{4}$

$\therefore BD = 105$

Clave A

7.



Según el dato:

$2BD - AC = 4$

$2(a + b) - 2a = 4$

$2a + 2b - 2a = 4$

$2b = 4 \Rightarrow b = 2$

Piden:

$CD = b$

$\therefore CD = 2$

Clave D

8.

a — b — b; K L M N

Piden:

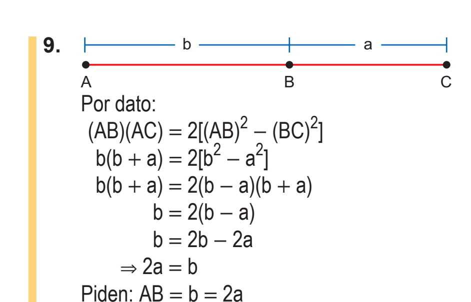
$E = \frac{KN + KL}{KM} = \frac{(a + 2b) + a}{a + b}$

$E = \frac{2(a + b)}{(a + b)}$

$\therefore E = 2$

Clave D

9.



Por dato:

$(AB)(AC) = 2[(AB)^2 - (BC)^2]$

$b(b + a) = 2[b^2 - a^2]$

$b(b + a) = 2(b - a)(b + a)$

$b = 2(b - a)$

$b = 2b - 2a$

$\Rightarrow 2a = b$

Piden: $AB = b = 2a$

$\therefore AB = 2a$

Clave C

10.

a — b — c — 3; A B C D E

Por dato:

$\frac{AB + CE}{7} = \frac{BE - CD}{4} = \frac{AE - DE}{9}$

$\frac{a + c + 3}{7} = \frac{b + c + 3 - c}{4} = \frac{a + b + c + 3 - 3}{9}$

$\frac{a + c + 3}{7} = \frac{b + 3}{4} = \frac{a + b + c}{9}$

$\frac{(a + c + 3) + (b + 3)}{(7) + (4)} = \frac{a + b + c}{9}$

$\frac{a + b + c + 6}{11} = \frac{a + b + c}{9}$

$9(a + b + c) + 54 = 11(a + b + c)$

$54 = 2(a + b + c)$

$\Rightarrow a + b + c = 27$

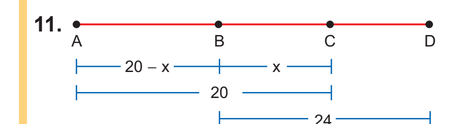
Piden:

$AE = a + b + c + 3 = 27 + 3$

$\therefore AE = 30$

Clave C

11.



$\Rightarrow AD = 3BC$

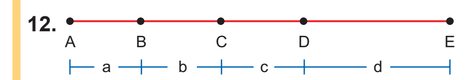
$AD = 3x$

$20 - x + 24 = 3x$

$44 = 4x \quad \Rightarrow x = 11$

Clave D

12.



Reemplazando:

$(a + b + c)d = a(b + c + d)$

$ad + bd + cd = ab + ac + ad$

$d(b + c) = a(b + c) \Rightarrow a = d$

$\therefore AB = DE$

Clave A

13.

a — b; A B C

Reemplazando:

$AC = 3BC \quad$ y $\quad AB = 24 - 4BC$

$a + b = 3b \qquad a = 24 - 4b$

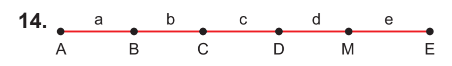
$a = 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = 24 - 4b$

$6b = 24$

$b = 4$

$\therefore b = BC \Rightarrow BC = 4$

Clave B

14. 

Reemplazando

$a + b + b + c + c + d + d + e = 55$

$(a + b + c + d + e) + (b + c + d) = 55$

$AE + BM = 55$

Pero:

$4AE = 7BM \Rightarrow BM = \left(\frac{4}{7}\right) AE$

Reemplazando:

$AE + \left(\frac{4}{7}\right) AE = 55$

$\left(\frac{11}{7}\right) AE = 55 \Rightarrow AE = 35$

Clave C

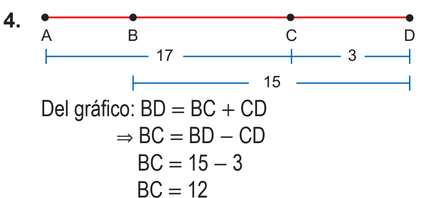
PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 8) Unidad 1

Comunicación matemática

1. Por definición **Clave D**
2. Por definición **Clave D**
3. Por definición **Clave C**

Razonamiento y demostración

4. 

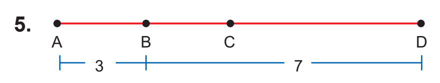
Del gráfico: $BD = BC + CD$

$\Rightarrow BC = BD - CD$

$BC = 15 - 3$

$BC = 12$

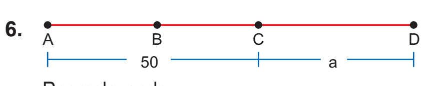
Clave C

5. 

$BD = 7 = BC + CD \Rightarrow CD = 7 - BC$

Pero: $AB = BC = 3 \Rightarrow CD = 4$

Clave C

6. 

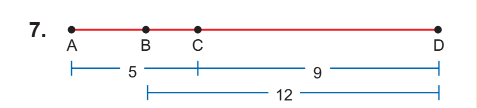
Reemplazando:

$50 + a = 150$ $\quad AD = 50 + a$

$2a = 100$ $\quad AD = 100$

$a = 50$

Clave B

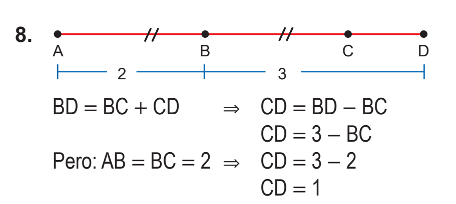
7. 

$BD = BC + CD \Rightarrow BC = BD - CD$

$BC = 12 - 9$

$BC = 3$

Clave C

8. 

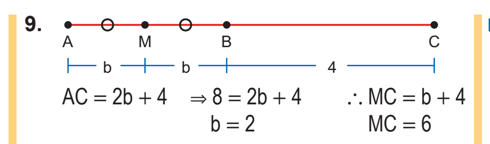
$BD = BC + CD \Rightarrow CD = BD - BC$

$CD = 3 - BC$

Pero: $AB = BC = 2 \Rightarrow CD = 3 - 2$

$CD = 1$

Clave A

9. 

$AC = 2b + 4 \quad \Rightarrow 8 = 2b + 4 \quad \therefore MC = b + 4$

$b = 2 \quad MC = 6$

Clave C

Resolución de problemas

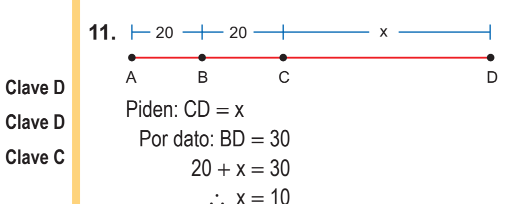
10. 

Entonces hay 11 separaciones y por dato cada separación mide 5 m.

Luego, la distancia entre la primera y última valla será:

$11(5 \text{ m}) = 55 \text{ m}$

Clave C

11. 

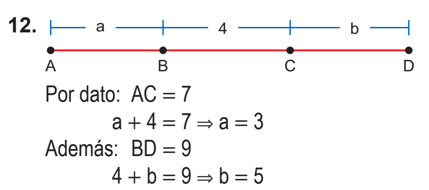
Piden: $CD = x$

Por dato: $BD = 30$

$20 + x = 30$

$\therefore x = 10$

Clave B

12. 

Por dato: $AC = 7$

$a + 4 = 7 \Rightarrow a = 3$

Además: $BD = 9$

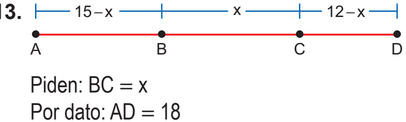
$4 + b = 9 \Rightarrow b = 5$

Piden:

$AD = a + 4 + b = 3 + 4 + 5$

$\therefore AD = 12$

Clave C

13. 

Piden: $BC = x$

Por dato: $AD = 18$

$15 - x + x + 12 - x = 18$

$27 - x = 18$

$\therefore x = 9$

Clave C

14. m a a 2m

A B M C D

Por dato: $AM = 12$

$m + a = 12$

Piden:

$BD = 2a + 2m = 2(a + m) = 2(12)$

$\therefore BD = 24$

Clave D

Nivel 2 (página 8) Unidad 1

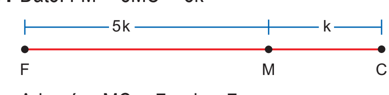
Comunicación matemática

15.

16.

Razonamiento y demostración

17. Dato: $FM = 5MC = 5k$



Además: $MC = 7 \Rightarrow k = 7$

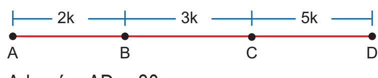
Piden: $2FC = 2(6k) = 12k = 12(7)$

$\therefore 2FC = 84$

Clave A

18. Si: $\frac{AB}{2} = \frac{AC}{5} = \frac{BD}{8} = k$

Entonces:



Además: $AD = 30$

$10k = 30 \Rightarrow k = 3$

Piden: $BC = 3k = 3(3)$

$\therefore BC = 9$

Clave D

19. Por dato:

$AB = BD = 3CD = 3k$

3k 2k k

A B C D

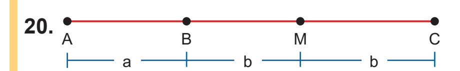
Además: $AD = 24$

$6k = 24 \Rightarrow k = 4$

Piden: $CD = k = 4$

$\therefore CD = 4$

Clave A

20. 

Reemplazando

$a + b + b + a = 18$

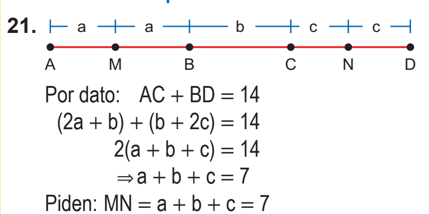
$2(a + b) = 18$

$a + b = 9$

Piden: $AM = a + b \Rightarrow AM = 9$

Clave C

Resolución de problemas

21. 

Por dato: $AC + BD = 14$

$(2a + b) + (b + 2c) = 14$

$2(a + b + c) = 14$

$\Rightarrow a + b + c = 7$

Piden: $MN = a + b + c = 7$

$\therefore MN = 7$

Clave D

22. A B C D

Por dato:

$AC = 40$

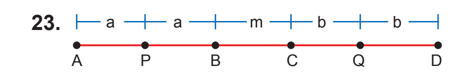
$AD + CD = 80 \quad (+)$

$AD + AC + CD = 120$ (donde $AC + CD = AD$)

$\Rightarrow 2AD = 120$

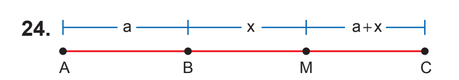
$\therefore AD = 60$

Clave D

23. 

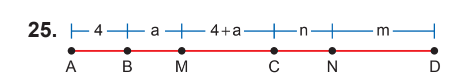
Por dato: AC + BD = 30
(2a + m) + (m + 2b) = 30
2(a + m + b) = 30
⇒ a + m + b = 15
Piden: PQ = a + m + b = 15
∴ PQ = 15

Clave B

24. 

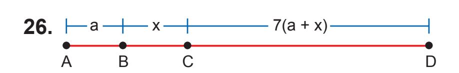
Piden: BM = x
Por dato: BC – AB = 32
(2x + a) – (a) = 32
2x = 32
∴ x = 16

Clave C

25. 

Por dato N es punto medio de $\overline{BD}$, entonces:
a + 4 + a + n = m
⇒ m = 2a + n + 4
Además: CD = 10
m + n = 10
(2a + n + 4) + n = 10
2(a + n) = 6
⇒ a + n = 3
Piden:
MN = 4 + a + n = 4 + (3)
∴ MN = 7

Clave C

26. 

Piden: BC = x
Por dato: BD – 7AB = 40
(x + 7a + 7x) – 7(a) = 40
8x + 7a – 7a = 40
8x = 40
∴ x = 5

Clave B

Nivel 3 (página 9) Unidad 1

Comunicación matemática

27.

Clave B

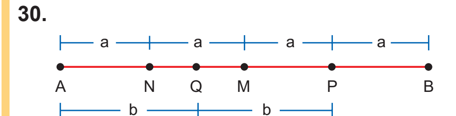
28.

Razonamiento y demostración

29. 

$\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$: 3
$\overline{AC}$; $\overline{BD}$: 2
$\overline{AD}$: 1
Por lo tanto:
n.° de segmentos = 3 + 2 + 1 = 6

Clave B

30. 

Del gráfico: 2b = 3a; $b = \frac{3a}{2}$

Además NQ = AQ – AN
⇒ NQ = b – a
⇒ NQ = b – a

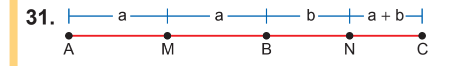
Reemplazando:

$\frac{3a}{2} - \frac{2a}{2} = 6 \Rightarrow a = 12$

AB = 4a ⇒ AB = 48

Clave D

Resolución de problemas

31. 

Por dato: AB = BC
2a = b + a + b
a = 2b
⇒ AM = 2BN

Clave E

32. a b c — A B C D

Por dato:
(AB)(CD) = 72 ⇒ ac = 72
Además:
(AB)(BD) + (AC)(CD) = (AD)(BC)
a(b + c) + (a + b)c = (a + b + c)b
ab + ac + ac + cb = ab + b^2 + cb
2ac = b^2
2(72) = b^2
⇒ b^2 = 144
b = 12
∴ BC = 12

Clave D

33. Por dato:
10AB = 5BC = 2CD = 20k



Además: AD = 16
16k = 16 ⇒ k = 1

Piden: MN = 10k = 10(1)
∴ MN = 10

Clave A

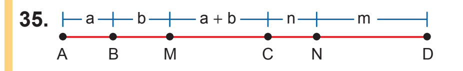
34. b a a — M A O B

Por dato:
$(MA)(MB) + \frac{(AB)^2}{4} = 361$

$(b)(b + 2a) + \frac{(2a)^2}{4} = 361$

$b^2 + 2ab + a^2 = 361$
$(b + a)^2 = 361$
⇒ b + a = 19
Piden: OM = b + a = 19
∴ OM = 19

Clave A

35. 

Por dato N es punto medio de $\overline{BD}$,
Entonces:
b + a + b + n = m
⇒ m = a + 2b + n
Además: AB + CD = 20
(a) + (n + m) = 20
a + n + (a + 2b + n) = 20
2(a + b + n) = 20
⇒ a + b + n = 10
Piden:
MN = a + b + n = 10
∴ MN = 10

Clave C

36. Por dato:
AB = 2BC = 3CD = 6k

6k 3k 2k — A P B C Q D — n n

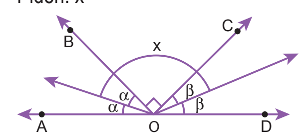
Además: AP – CQ = 16
(6k – n) – (2k – n) = 16
6k – n – 2k + n = 16
4k = 16 ⇒ k = 4

Piden:
PQ = n + 3k + (2k – n)
PQ = 5k = 5(4)
∴ PQ = 20

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 10) Unidad 1

1. Piden: x



De la figura:

$x = \alpha + \beta + 90°$

También:

$2\alpha + 2\beta = 90°$

$\alpha + \beta = 45°$

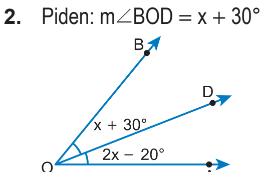
$\Rightarrow x = \alpha + \beta + 90°$

$x = 45° + 90°$

$\therefore\ x = 135°$

Clave B

2. Piden: $m\angle BOD = x + 30°$



Como $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz:

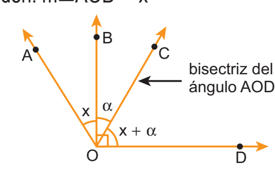
$\Rightarrow x + 30° = 2x - 20°$

$x = 50°$

$\therefore\ x + 30° = 50° + 30° = 80°$

Clave D

3. Piden: $m\angle AOB = x$



Dato: $m\angle AOB + m\angle AOC = 90°$

$x + x + \alpha = 90°$

$2x + \alpha = 90°$ ...(1)

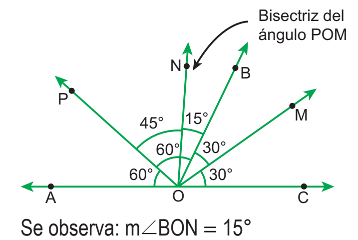
También: $2\alpha + x = 90°$ ...(2)

De (1) y (2):

$x = 30°$

Clave A

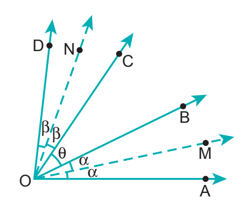
4. Piden: $m\angle BON$



Se observa: $m\angle BON = 15°$

Clave B

5.



Piden:

$m\angle BOD = \theta + 2\beta$

Por dato: $m\angle AOC = 48°$

$2\alpha + \theta = 48°$

$\Rightarrow \alpha = 24° - \dfrac{\theta}{2}$ ...(1)

Además: $m\angle MON = 30°$

$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = 30°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

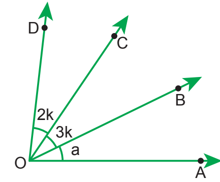
$\left(24° - \dfrac{\theta}{2}\right) + \theta + \beta = 30°$

$\dfrac{\theta}{2} + \beta = 6°$

$\therefore\ \theta + 2\beta = 12°$

Clave B

6.



Por dato:

$2(m\angle BOC) = 3(m\angle COD)$

$\Rightarrow \dfrac{m\angle BOC}{m\angle COD} = \dfrac{3}{2} = k$

$\Rightarrow m\angle BOC = 3k \ \wedge\ m\angle COD = 2k$

Además:

$2(m\angle AOB) + 3(m\angle AOD) = 120°$

$2(a) + 3(a + 2k + 3k) = 120°$

$5a + 15k = 120°$

$a + 3k = 24°$

Piden:

$m\angle AOC = a + 3k$

$\therefore\ m\angle AOC = 24°$

Clave C

7. Sea α: la medida del ángulo

Por dato:

$S_{(\alpha)} - 2C_{(\alpha)} + 20° = \dfrac{3}{5}S_{(\alpha)}$

$\dfrac{2}{5}S_{(\alpha)} = 2C_{(\alpha)} - 20°$

$S_{(\alpha)} = 5C_{(\alpha)} - 50°$

$180° - \alpha = 5(90° - \alpha) - 50°$

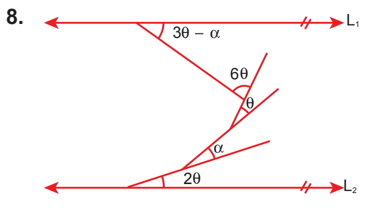
$180° - \alpha = 450° - 5\alpha - 50°$

$4\alpha = 220°$

$\therefore\ \alpha = 55°$

Clave C

8.



Por propiedad:

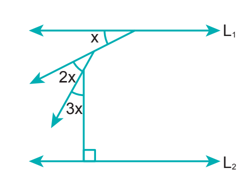
$2\theta + \alpha + \theta + 6\theta + 3\theta - \alpha = 180°$

$12\theta = 180°$

$\therefore\ \theta = 15°$

Clave E

9. Piden: x



Por propiedad:

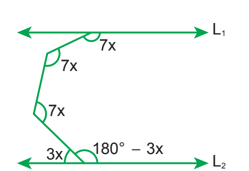
$x + 2x + 3x + 90° = 180°$

$6x = 90°$

$x = 15°$

Clave C

10. Piden: x



Por propiedad:

$7x + 7x + 7x + 180° - 3x = 180°(3)$

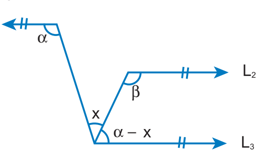
$18x = 360°$

$x = 20°$

Clave A

11. Piden: x

Dato: $\alpha + \beta = 220°$



Se traza $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Por ángulos conjugados internos:

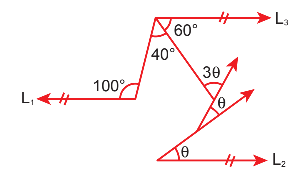
$\underbrace{\beta + \alpha}_{220°} - x = 180°$

$220° - x = 180°$

$x = 40°$

Clave A

12. Piden: θ



Se traza $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Por propiedad:

$\theta + \theta + 3\theta + 60° = 180°$

$5\theta = 120°$

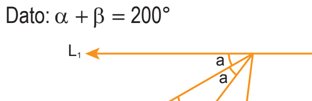
$\theta = 24°$

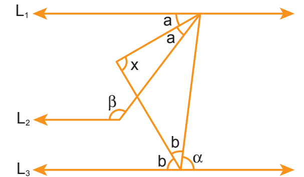
Clave C

13. Piden: x



Dato: $\alpha + \beta = 200°$





Sabemos:

$x = a + b$

También:

$$\left.\begin{aligned} 2a + \beta &= 180° \\ 2b + \alpha &= 180° \end{aligned}\right\} (+)$$

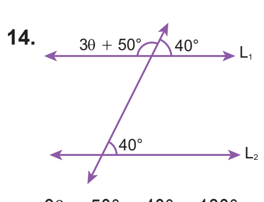
$2a + 2b + 200° = 360°$

$\Rightarrow \underbrace{a + b}_{x} = 80°$

$x = 80°$

Clave B

14.



$3\theta + 50° + 40° = 180°$

$3\theta = 90°$

$\theta = 30°$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 12) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

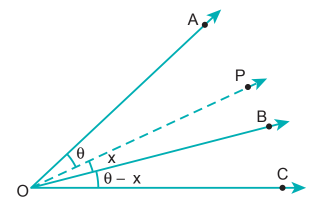
2. **Clave A**

3.

4.

Razonamiento y demostración

5.



Por dato:

$m\angle AOB - m\angle BOC = 40°$

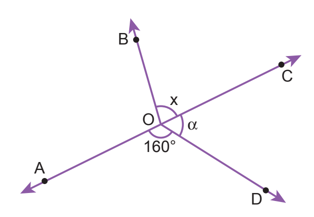
$(\theta + x) - (\theta - x) = 40°$

$2x = 40°$

$\therefore\ x = 20°$

Clave C

6.



Piden: $m\angle BOC = x$

Por dato: $160° + \alpha = 180°$

$\Rightarrow \alpha = 20°$

Además: $m\angle BOD = 170°$

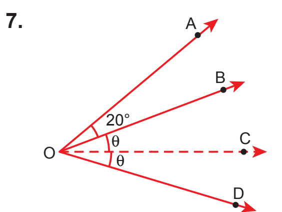
$\alpha + x = 170°$

$20° + x = 170°$

$\therefore\ x = 150°$

Clave C

7.



Por dato: $m\angle AOD = 80°$

$20° + 2\theta = 80°$

$2\theta = 60°$

$\Rightarrow \theta = 30°$

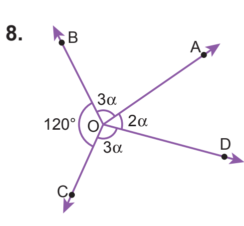
Piden:

$m\angle AOC = 20° + \theta = 20° + 30°$

$\therefore\ m\angle AOC = 50°$

Clave C

8.



Del gráfico:

$120° + 3\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 360°$

$8\alpha = 240°$

$\Rightarrow \alpha = 30°$

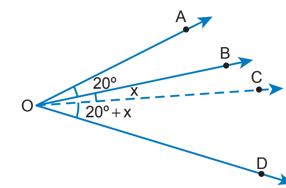
Piden:

$m\angle AOD = 2\alpha = 2(30°)$

$\therefore m\angle AOD = 60°$

Clave C

9.



Piden: $m\angle BOC = x$

Por dato: $m\angle BOD = 60°$

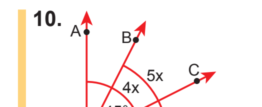
$x + 20° + x = 60°$

$2x = 40°$

$\therefore\ x = 20°$

Clave B

10.



Del gráfico:

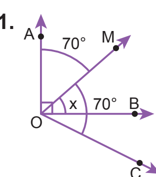
$4x + 5x - 45° = 90°$

$9x = 135°$

$x = 15°$

Clave D

11.



De la figura:

$x + 70° = 90°$

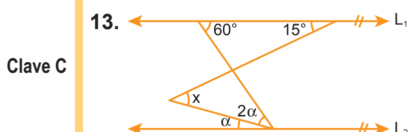
$x = 20°$

Clave D

12. $SC_{(40°)} = S_{(50°)} = 130°$

Clave C

13.



Por ángulos alternos internos:

$3\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 20°$

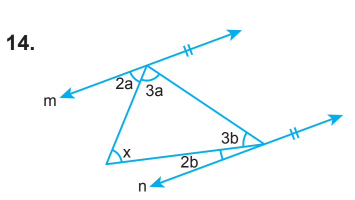
Por propiedad:

$x = 15° + \alpha = 15° + (20°)$

$\therefore\ x = 35°$

Clave C

14.



Por ángulos conjugados internos:

$5a + 5b = 180° \Rightarrow a + b = 36°$

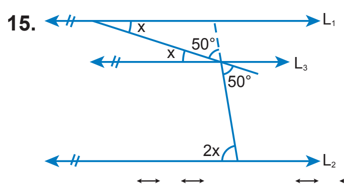
Por propiedad:

$x = 2a + 2b = 2(a + b) = 2(36°)$

$\therefore\ x = 72°$

Clave B

15.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_3} \mathbin{//} \overleftrightarrow{L_1}$, entonces $\overleftrightarrow{L_3} \mathbin{//} \overleftrightarrow{L_2}$

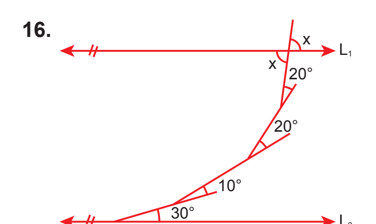
Por ángulos correspondientes:

$2x = x + 50°$

$\therefore\ x = 50°$

Clave E

16.



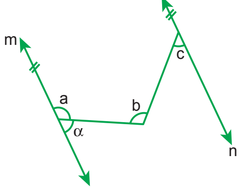
Por propiedad:

$x = 30° + 10° + 20° + 20°$

$\therefore\ x = 80°$

Clave D

17.



Por dato: $a + b = 200°$

Del gráfico: $a + \alpha = 180°$

$\Rightarrow \alpha = (180° - a)$

Por propiedad: $b = c + \alpha$

$b = c + 180° - a$

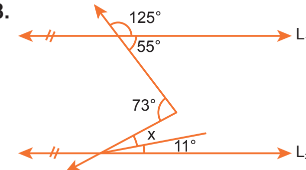
$a + b - 180° = c$

$(200°) - 180° = c$

$\therefore\ c = 20°$

Clave B

18.



Por propiedad:

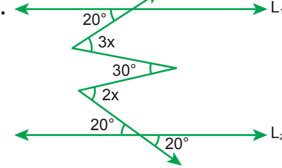
$55° + (x + 11°) = 73°$

$66° + x = 73°$

$\therefore\ x = 7°$

Clave E

19.



Por propiedad:

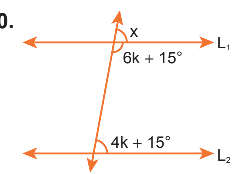
$20° + 30° + 20° = 3x + 2x$

$70° = 5x$

$x = 14°$

Clave B

20.



De la figura:

$(4k + 15°) + (6k + 15°) = 180°$

$10k + 30° = 180°$

$10k = 150°$

$k = 15°$

Luego:

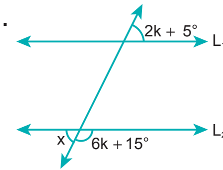
$x = 4k + 15°$

$x = 4(15°) + 15°$

$x = 75°$

Clave C

21.



De la figura:

$(6k + 15°) + (2k + 5°) = 180°$

$8k + 20° = 180°$

$8k = 160°$

$k = 20°$

Además:

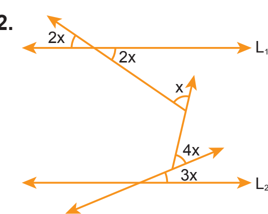
$x + 6k + 15° = 180°$

$\Rightarrow x + 6(20°) + 15° = 180°$

$x = 45°$

Clave C

22.



Por propiedad:

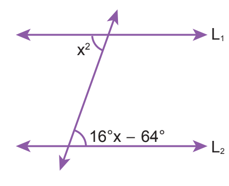
$3x + 4x + x + 2x = 180°$

$10x = 180°$

$x = 18°$

Clave B

23. Piden: x



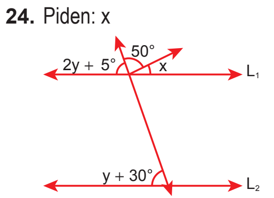
Sabemos:

$x^2 = 16x - 64°$

Resolviendo: $x = 8°$

Clave B

24. Piden: x



Por ángulos correspondientes:

$2y + 5° = y + 30°$

$y = 25°$

Luego: $2y + 5° + 50° + x = 180°$

$2(25°) + 5° + 50° + x = 180°$

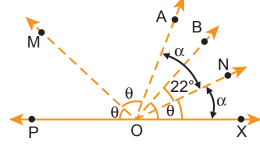
$105° + x = 180°$

$\therefore\ x = 75°$

Clave D

Resolución de problemas

25.



Del gráfico:

$2\alpha + 2\theta = 180°$

$\alpha + \theta = 90°$ ...(1)

Además:

$\alpha + 22° = \theta$

$\alpha = \theta - 22°$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

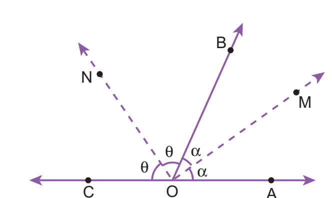
$(\theta - 22°) + \theta = 90°$

$2\theta = 112°$

$\therefore \theta = 56°$

Clave B

26.



Piden:

$m\angle MON = \theta + \alpha$

Por dato, los ángulos AOB y BOC son adyacentes y suplementarios, entonces:

$2\theta + 2\alpha = 180°$

$\therefore \theta + \alpha = 90°$

Clave E

27. Sea el ángulo: α

Del enunciado:

$\alpha = \frac{1}{8}S_{(\alpha)}$

$\alpha = \frac{1}{8}(180° - \alpha)$

$8\alpha = 180° - \alpha$

$9\alpha = 180°$

$\therefore\ \alpha = 20°$

Clave A

28. Sea el ángulo: α

Por dato:

$S_{(\alpha)} - C_{(\alpha)} = 6\alpha$

$(180° - \alpha) - (90° - \alpha) = 6\alpha$

$90° = 6\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 15°$

Clave E

29. Del enunciado:



$180° - x = 4x$
$5x = 180°$
$x = 36°$

Clave D

30. Del enunciado:

$x + y = 180°$
$y = 2x$

Luego:

$x + 2x = 180°$
$3x = 180°$
$x = 60°$

Clave B

31. Del enunciado:

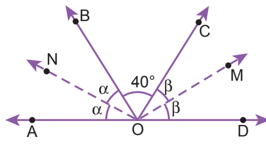
$(180° - x) + (180° - y) = 280°$
$360° - (x + y) = 280°$
$x + y = 80°$

Piden: $C_{(x+y)}$

$\Rightarrow 90° - (x + y) = 10°$

Clave A

32.



De la figura:

$2\alpha + 40° + 2\beta = 180°$
$\alpha + \beta = 70°$ ...(1)

Luego:

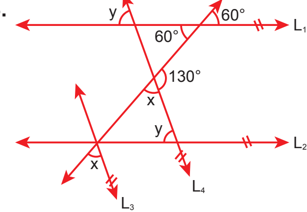
$m\angle NOM = \alpha + \beta + 40°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$m\angle NOM = 110°$

Clave B

33.



Los ángulos x e y se trasladan por ángulos correspondientes.

Por propiedad:

$60° + y = 130°$
$\Rightarrow y = 70°$

Del gráfico:

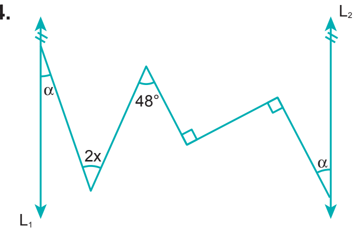
$x + 130° = 180°$
$\Rightarrow x = 50°$

Piden:

$$\frac{x}{y} = \frac{50°}{70°} = \frac{5}{7}$$
$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{7}$$

Clave B

34.

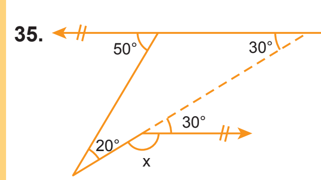


Por propiedad:

$\alpha + 48° + 90° = 2x + 90° + \alpha$
$48° = 2x$
$\therefore x = 24°$

Clave E

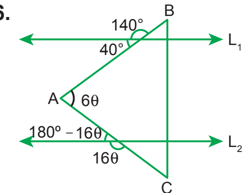
35.



$x + 30° = 180° \Rightarrow x = 150°$

Clave D

36.



$180° - 16\theta + 40° = 6\theta$
$220 = 22\theta$ [sic: printed as $22\theta = 220°$]
$\theta = 10°$

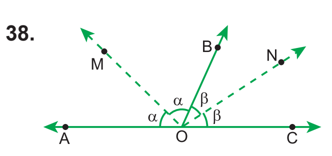
Clave D

Nivel 2 (página 15) Unidad 1

Comunicación matemática

37.

38.



De la figura:

$m\angle MON = \alpha + \beta$
$2(\alpha + \beta) = 180°$
$\alpha + \beta = 90°$

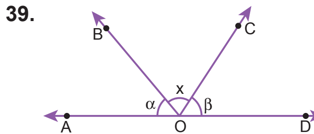
Entonces:

$m\angle MON = 90°$

Clave A

Razonamiento y demostración

39.



Por dato:

$m\angle AOC + m\angle BOD = 260°$
$(\alpha + x) + (x + \beta) = 260°$
$\Rightarrow 2x + \alpha + \beta = 260°$ ...(1)

Del gráfico:

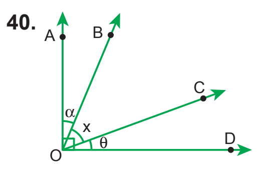
$\alpha + x + \beta = 180°$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 180° - x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$2x + (180° - x) = 260°$
$x = 260° - 180°$
$\therefore x = 80°$

Clave A

40.



Del gráfico: $\alpha + x + \theta = 90°$

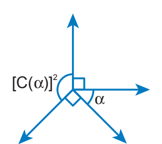
Por dato:

$m\angle AOC + m\angle BOD = 140°$
$(\alpha + x) + (x + \theta) = 140°$
$x + \underbrace{\alpha + x + \theta}_{90°} = 140°$

$\therefore x = 50°$

Clave C

41.



De la figura:

$(90° - \alpha)^2 + \alpha = 180°$
$(90° - \alpha)^2 - (90° - \alpha) = 90°$

Haciendo $x = 90° - \alpha$, tenemos:

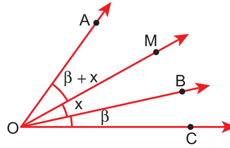
$x^2 - x = 90°$
$x(x - 1) = 90°$
$x = 10°$

Luego:

$90° - \alpha = 10°$
$\alpha = 80°$

Clave E

42.



$\overrightarrow{OM}$: bisectriz del $\angle AOC$

Dato:

$m\angle AOB - m\angle BOC = 20°$
$(\beta + 2x) - \beta = 20°$
$2x = 20°$
$x = 10°$

Clave B

43.



De la figura:

$8\alpha + 5\alpha - x = 180°$

$13\alpha - x = 180°$ ...(1)

Dato:

$m\angle AOB - m\angle COD = 60°$

$8\alpha - x - (5\alpha - x) = 60°$

$3\alpha = 60°$

$\alpha = 20°$

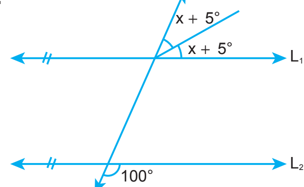
Reemplazando en (1):

$13(20°) - x = 180°$

$x = 80°$

Clave D

44.



Por ángulos conjugados externos:

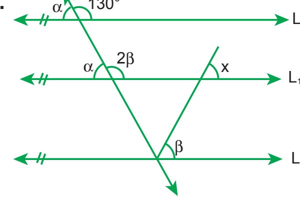
$(2x + 10°) + 100° = 180°$

$2x = 70°$

$\therefore x = 35°$

Clave C

45.



Del gráfico se deduce que: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L}$

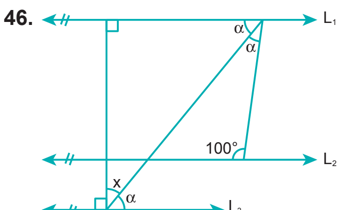
Por ángulos correspondientes:

- $2\beta = 130° \Rightarrow \beta = 65°$
- $\beta = x = 65°$

$\therefore x = 65°$

Clave D

46.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$, entonces $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Por ángulos conjugados internos:

$2\alpha + 100° = 180°$

$2\alpha = 80° \Rightarrow \alpha = 40°$

Del gráfico:

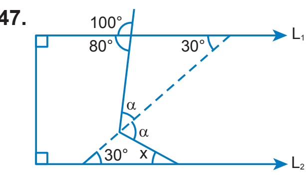
$x + \alpha = 90°$

$x + 40° = 90°$

$\Rightarrow x = 50°$

Clave C

47.



Por propiedad:

$x + 80° = 2\alpha$ ...(1)

Luego: $\alpha + 30° = 80° \Rightarrow \alpha = 50°$

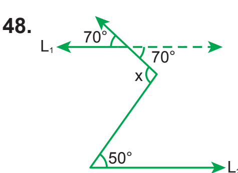
En (1):

$x + 80° = 100°$

$x = 20°$

Clave C

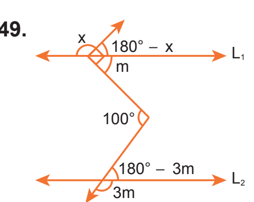
48.



$x = 50° + 70° = 120°$

Clave B

49.



Por propiedad:

$180° - 3m + m = 100°$

$2m = 80°$

$m = 40°$

Luego:

$180° - x + m = 90°$

$180° - x + 40° = 90°$

$x = 130°$

Clave A

Resolución de problemas

50. Por dato:

$$\alpha = \frac{2}{3}(\alpha + \beta)$$

$3\alpha = 2\alpha + 2\beta$

$\alpha = 2\beta$

Además: $\alpha < 90°$

$2\beta < 90°$

$\Rightarrow \beta < 45°$

Por lo tanto, el máximo valor entero de β es 44°.

Clave B

51. Sea α: la medida del ángulo

Del enunciado:

$$\alpha - \left(\frac{90° - \alpha}{2} + 3°\right) = \frac{1}{5}[(180° - \alpha) - (90° - \alpha)]$$

$$\alpha - \left(48° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}(180° - \alpha - 90° + \alpha)$$

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} - 48° = 18°$$

$$\Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 66°$$

$$\therefore \alpha = 44°$$

Clave E

52. Del enunciado:

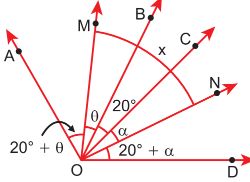
$$\frac{90° - x}{180° - \frac{x}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$270° - 3x = 180° - \frac{x}{2}$$

$x = 36°$

Clave B

53.



$\overrightarrow{OM}$: bisectriz del $\angle AOC$

$\overrightarrow{ON}$: bisectriz del $\angle BOD$

Del gráfico: $\theta + 20° + \alpha = x$ ... (1)

Por dato:

$m\angle AOD = 100°$

$\Rightarrow (20° + \theta) + x + (20° + \alpha) = 100°$

$\theta + 20° + \alpha = 80 - x$ ... (2)

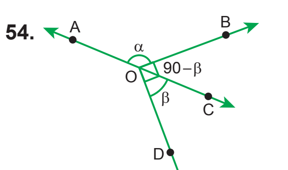
Reemplazando (2) en (1):

$80° - x = x$

$x = 40°$

Clave A

54.



De la figura:

$\alpha + (90° - \beta) = 180°$

$\alpha - \beta = 90°$ ...(1)

Dato:

$m\angle AOB + m\angle COD = 200°$

$\alpha + \beta = 200°$ ... (2)

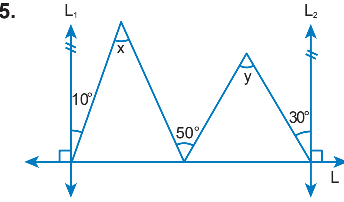
Sumando (1) y (2):

$2\alpha = 290°$

$\alpha = 145°$

Clave A

55.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L}$

Luego se cumple que: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

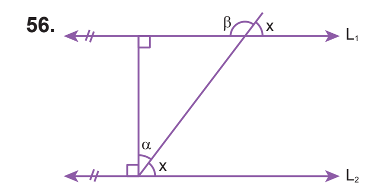
Por propiedad:

$x + y = 10° + 50° + 30°$

$\therefore x + y = 90°$

Clave C

56.



Del gráfico:

$\beta + x = 180°$ ...(1)

$\alpha + x = 90°$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$\underbrace{\beta + \alpha} + 2x = 270°$

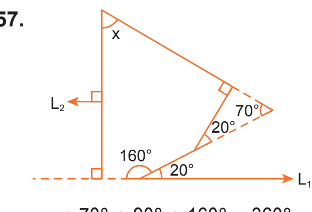
$150° + 2x = 270°$

$2x = 120°$

$\therefore\ x = 60°$

Clave C

57.

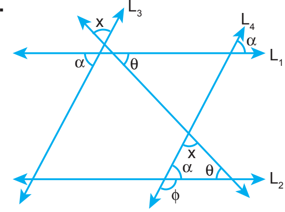


$x + 70° + 90° + 160° = 360°$

$\therefore\ x = 40°$

Clave A

58.



Por dato: $\phi - \theta = 75°$

Se deduce: $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_4}$

De la figura:

$\theta + x = \phi$

$x = \phi - \theta = 75°$

Clave D

Nivel 3 (página 17) Unidad 1

Comunicación matemática

59. Sea x la medida del ángulo.

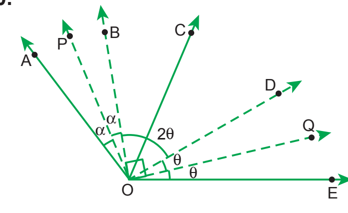
Dato: $90° - x = 4x$

$5x = 90°$

$\Rightarrow x = 18°$

Clave D

60.



Por dato: $\overrightarrow{OB}$ bisectriz del $\angle AOD$.

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle BOD$

$2\alpha = 2\theta$

$\Rightarrow \alpha = \theta$

Del gráfico: $3\theta = 90°$

$\Rightarrow \theta = 30°$

Piden:

$m\angle POQ = \alpha + 3\theta = (\theta) + 3\theta = 4\theta$

$m\angle POQ = 4(30°) = 120°$

$\therefore\ m\angle POQ = 120°$

Clave E

61.

62.

Razonamiento y demostración

63. Piden:

$$E = \frac{SC_{(50°)} - SS_{(139°)}}{CCC_{(89°)}}$$

Luego:

- $SC_{(50°)} = S_{(90° - 50°)} = S_{(40°)}$
  $SC_{(50°)} = 180° - 40° = 140°$
- $SS_{(139°)} = S_{(180° - 139°)}$
  $SS_{(139°)} = S_{(41°)} = 180° - 41°$
  $SS_{(139°)} = 139°$
- $CCC_{(89°)} = CC_{(90° - 89°)}$
  $CCC_{(89°)} = CC_{(1°)} = C_{(90° - 1°)}$
  $CCC_{(89°)} = C_{(89°)} = 90° - 89°$
  $CCC_{(89°)} = 1°$

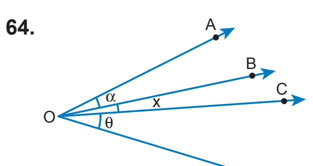
Reemplazando en la expresión E:

$$E = \frac{140° - 139°}{1°} = \frac{1°}{1°} = 1$$

$\therefore\ E = 1$

Clave A

64.



Por dato: $(\alpha)(\theta) = 98°$

Además del enunciado:

$(\alpha)(x + \theta) + (\alpha + x)(\theta) = (\alpha + x + \theta)(x)$

$\alpha x + \alpha\theta + \alpha\theta + \theta x = \alpha x + x^2 + \theta x$

$2\alpha\theta = x^2$

$2(98) = x^2$

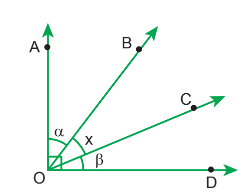
$196 = x^2$

$\Rightarrow\ x = 14$

Por lo tanto, la $m\angle BOC$ es 14°.

Clave C

65.



De la figura:

$\alpha + x + \beta = 90°$ ...(1)

Dato:

$m\angle AOC + m\angle BOD = 7x$

$(\alpha + x) + (x + \beta) = 7x$

$\alpha + \beta = 5x$ ...(2)

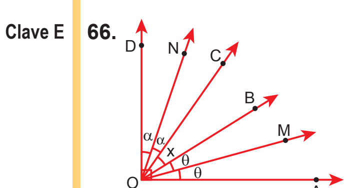
Reemplazando (2) en (1):

$6x = 90°$

$x = 15°$

Clave C

66.



Dato:

$m\angle MON = 3m\angle BOC$

$\alpha + \theta + x = 3x$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 2x$

Del gráfico:

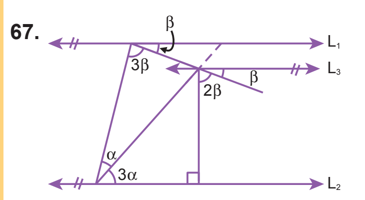
$2(\alpha + \theta) + x = 90°$

$5x = 90°$

$x = 18°$

Clave C

67.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_1}$, entonces $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

Por ángulos conjugados internos:

$3\beta + 90° = 180°$

$3\beta = 90° \Rightarrow \beta = 30°$

Por ángulos conjugados internos:

$4\alpha + 4\beta = 180°$

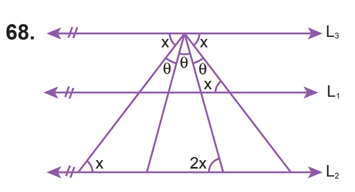
$4\alpha + 4(30°) = 180°$

$4\alpha = 60°$

$\therefore\ \alpha = 15°$

Clave D

68.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_1}$ entonces $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

Por ángulos alternos internos:

$2x = \theta + x \qquad \Rightarrow x = \theta$

Del gráfico:

$x + 3\theta + x = 180°$

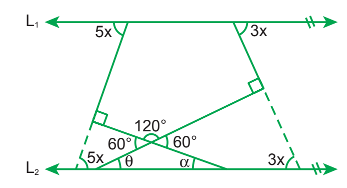
$2x + 3(x) = 180°$

$5x = 180°$

$\therefore\ x = 36°$

Clave E

69.



Por propiedad:

- $5x + 60° = 90° + \theta$
  $\Rightarrow 5x = 30° + \theta$ ...(1)
- $3x + 60° = 90° + \alpha$
  $\Rightarrow 3x = 30° + \alpha$ ...(2)

Sumando (1) y (2):
$8x = 60° + (\theta + \alpha)$ ...(3)

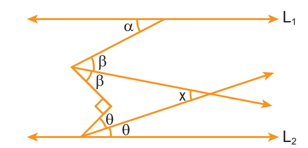
Por propiedad también:
$5x + \alpha = 90° \wedge 3x + \theta = 90°$

Sumando estas dos expresiones:
$8x + (\alpha + \theta) = 180°$ ...(4)

Luego sumando (3) y (4) obtenemos:
$8x + 8x = 180° + 60°$
$16x = 240° \quad \therefore\ x = 15°$

Clave E

70.

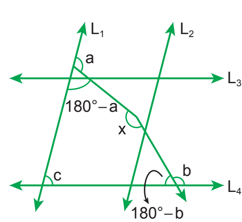


De la figura:
$\theta + \beta + x = 90°$ ...(1)
$\theta + \beta = \alpha + x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$\alpha + 2x = 90°$
$x = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$

Clave A

71.

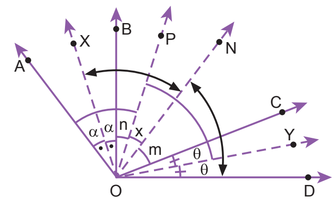


$(180° - a) + (180° - b) + c + x = 360°$
$\therefore\ x = a + b - c$

Clave D

Resolución de problemas

72.



Por dato $m\angle AOD = a \wedge m\angle BOC = b$

Entonces:
$2\alpha + n + x + m + 2\theta = a$
$n + x + m = b$
$\Rightarrow 2\alpha + 2\theta = a - b$
$\Rightarrow \alpha + \theta = \dfrac{a-b}{2}$ ...(1)

Del gráfico:
$2\alpha + n = x + m + \theta$
$2\theta + m = x + n + \alpha$ (+)
$\alpha + \theta = 2x$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):
$2x = \dfrac{a-b}{2} \Rightarrow x = \dfrac{a-b}{4}$

Clave D

73. Sea α: el menor de los ángulos

Del enunciado:
$\alpha + (\alpha + r) + (\alpha + 2r) + (\alpha + 3r) + (\alpha + 4r) = 180°$
$\Rightarrow \alpha + 2r = 36°$ ...(1)

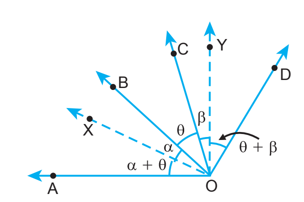
Además:
$\alpha = \sqrt{\alpha + 4r}$
$\alpha^2 = \alpha + 4r$ ...(2)

De (1) y (2):
$\alpha^2 + \alpha = 72$
$\alpha(\alpha + 1) = 8(8 + 1)$
$\Rightarrow \alpha = 8°$

Por lo tanto, el menor ángulo mide 8°.

Clave E

74.

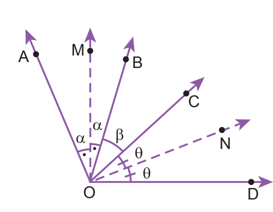


Por dato: $m\angle AOB + m\angle COD = 70°$
$(2\alpha + \theta) + (2\beta + \theta) = 70°$
$2(\alpha + \theta + \beta) = 70°$
$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = 35°$

Piden:
$m\angle XOY = \alpha + \theta + \beta = 35°$
$\therefore\ m\angle XOY = 35°$

Clave D

75.



Por dato:
$m\angle AOC - m\angle BOD = 10°$
$(2\alpha + \beta) - (\beta + 2\theta) = 10°$
$\Rightarrow \alpha - \theta = 5°$ ...(1)

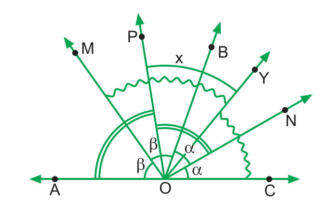
Además:
$m\angle MON = 100°$
$\alpha + \beta + \theta = 100°$ ...(2)

Sumando (1) y (2):
$2\alpha + \beta = 105°$

Piden:
$m\angle AOC = 2\alpha + \beta = 105°$
$\therefore\ m\angle AOC = 105°$

Clave A

76.



De la figura:

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

$m\angle AOY = \beta + \dfrac{2\alpha + \beta}{2} = \dfrac{3\beta + 2\alpha}{2}$ ... (1)

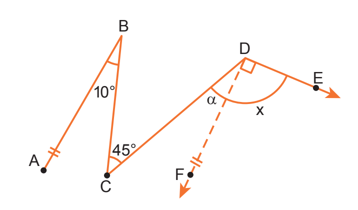
$m\angle AOP = \dfrac{\alpha + 2\beta}{2}$ ...(2)

Restando (2) de (1):

$m\angle AOY - m\angle AOP = x = \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$

Clave B

77.



Por dato: $\overline{AB} \perp \overline{DE}$

Trazamos una paralela a $\overline{AB}$ por el punto D ($\overline{DF}$).

Como $AB \perp DE \Rightarrow DF \perp DE$

Por propiedad:

$45° = 10° + \alpha \Rightarrow \alpha = 35°$

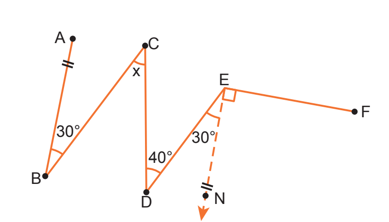
Del gráfico:

$x = \alpha + 90° = 35° + 90°$

$\therefore\ x = 125°$

Clave C

78.



Por dato: $\overline{AB} \perp \overline{EF}$

Trazamos una paralela a $\overline{AB}$ por el punto E ($\overline{EN}$).

Como: $\overline{AB} \perp \overline{EF} \Rightarrow \overline{EN} \perp \overline{EF}$

Por propiedad:

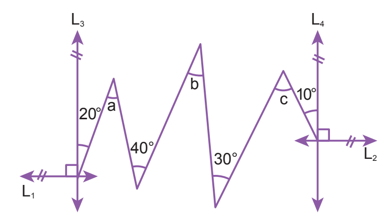
$30° + 40° = x + 30°$

$70° = x + 30°$

$\therefore x = 40°$

Clave D

79.



Trazamos: $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_4} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

Luego se cumple que: $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$

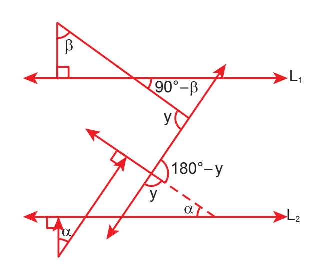
Por propiedad:

$a + b + c = 20° + 40° + 30° + 10°$

$\therefore\ a + b + c = 100°$

Clave D

80.



De la figura:

$(90° - \beta) + (180° - y) = y + \alpha$

$270° - \beta - y = y + \alpha$

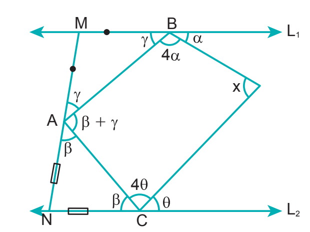
$(\alpha + \beta) + 2y = 270°$

$66° + 2y = 270°$

$y = 102°$

Clave E

81.



De la figura: $x = \alpha + \theta$

$2(\beta + \gamma) = 180°$

$\beta + \gamma = 90°$

Luego:

$\beta + \gamma + 4\alpha + 4\theta + x = 360°$

$90° + 4(\alpha + \theta) + x = 360°$

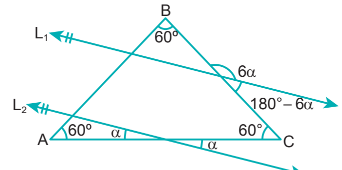
$5x = 270°$

$x = 54°$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 19) Unidad 1

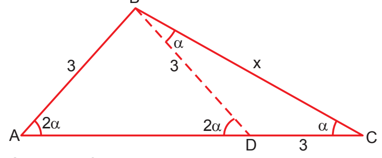
1.



Por propiedad:
$180° - 6\alpha + \alpha = 60°$
$120° = 5\alpha$
$\therefore\ \alpha = 24°$

Clave E

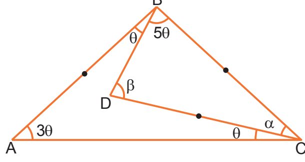
2.



Sea: $m\angle C = \alpha$
Como:
$2\alpha > \alpha \Rightarrow x > 3$ ...(1)
En el $\triangle BDC$ por desigualdad triangular:
$x < 3 + 3 \quad x < 6$ ...(2)
De (1) y (2): $3 < x < 6$
$\therefore\ x_{mín.} = 4 \wedge x_{máx.} = 5$

Clave D

3.

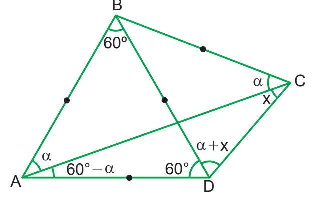


Por propiedad:
$\theta + 3\theta + \theta = \beta \Rightarrow \beta = 5\theta$
Como: $\beta = 5\theta \Rightarrow BC = DC$
Por dato: $AB = DC$
$\Rightarrow AB = BC \Rightarrow m\angle A = m\angle C$
$3\theta = \theta + \alpha$
$\Rightarrow \alpha = 2\theta$

En el triángulo ABC:
$3\theta + (\theta + 5\theta) + (\alpha + \theta) = 180°$
$10\theta + (2\theta) = 180°$
$12\theta = 180°$
$\therefore\ \theta = 15°$

Clave B

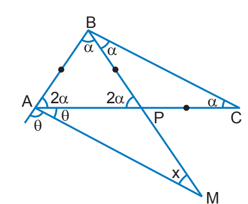
4. Por dato: $AB = BC = AD = BD$



En el triángulo ACD:
$(60° - \alpha) + (60° + \alpha + x) + x = 180°$
$120° + 2x = 180°$
$2x = 60°$
$\therefore\ x = 30$

Clave E

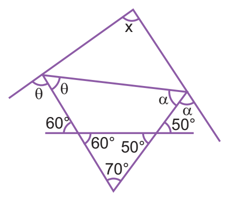
5.



En el triángulo ABP:
$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180°$
$5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$
Del gráfico:
$2\theta + 2\alpha = 180°$
$\theta + \alpha = 90°$
$\theta + 36° = 90° \Rightarrow \theta = 54°$
En el triángulo APM:
$x + \theta = 2\alpha$
$x + 54° = 2(36°)$
$x = 72° - 54°$
$\therefore\ x = 18°$

Clave C

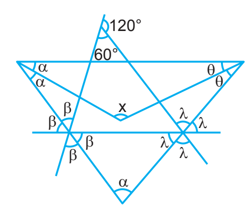
6.



Por propiedad (ángulo formado por dos bisectrices exteriores):
$70° = 90° - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 20°$
$\therefore\ x = 40°$

Clave B

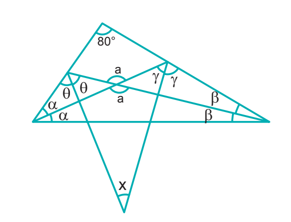
7.



Por propiedad (ángulo formado por dos bisectrices exteriores):
$\alpha = 90° - \frac{60°}{2} = 90° - 30°$
$\Rightarrow \alpha = 60°$
Por propiedad (ángulo formado por dos bisectrices interiores):
$x = 90° + \frac{\alpha}{2} = 90° + \frac{60°}{2}$
$x = 90° + 30°$
$\therefore\ x = 120°$

Clave E

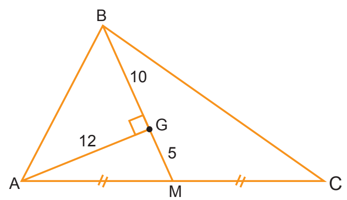
8.



Por propiedad (ángulo formado por dos bisectrices interiores):
$a = 90° + \frac{80°}{2} \Rightarrow a = 130°$
Por propiedad de triángulos:
$80° + x = \theta + \gamma$
$\theta + \gamma + x = a$ (+)
$80° + 2x = a$
$80° + 2x = 130°$
$2x = 50°$
$\therefore\ x = 25°$

Clave D

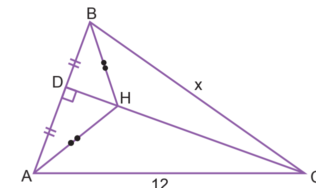
9.



Prolongamos $\overline{BG}$ hasta un punto $M \in AC$.
Por ser G baricentro:
$BG = 2GM \quad \wedge \quad AM = MC$
$10 = 2GM \Rightarrow GM = 5$
En el ◺AGM, por el teorema de Pitágoras:
$(AM)^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AM = 13$
Piden:
$AC = 2AM = 2(13)$
$\therefore\ AC = 26$

Clave C

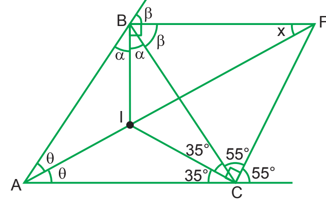
10.



Prolongamos $\overline{CH}$ hasta el punto $D \in AB$
Como H es el ortocentro $\Rightarrow CD \perp AB$
Como el $\triangle AHB$ es isósceles $\Rightarrow AD = DB$
Entonces, $\overline{CD}$ resulta mediatriz de $\overline{AB}$.
$\therefore\ x = 12$

Clave E

11.



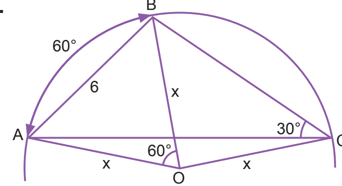
Por ser I incentro del $\triangle ABC$:
- $m\angle BAI = m\angle CAI$
- $m\angle ABI = m\angle ICB = 35°$

Además: $35° + 35° + m\angle BCF + 55° = 180°$
$\Rightarrow m\angle BCF = 55°$
Del gráfico el punto F es un excentro del $\triangle ABC$.
Entonces, el cuadrilátero IBFC es inscriptible.
$\therefore\ x = 35°$

Clave B



12.



Como O es circuncentro del $\triangle ABC$:

$\Rightarrow OA = OB = OC = x$

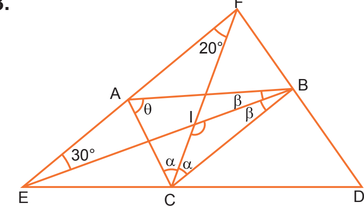
Como $m\angle ACB = 30° \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 60°$

Luego: $m\angle AOB = 60°$

$\therefore\ x = 6$

Clave C

13.



Por ser EFD el triángulo exincentral del $\triangle ABC$, I es incentro del $\triangle ABC$.

Por propiedad de triángulos:

$30° + 20° = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 50°$

En el $\triangle ABC$:

$\theta + 2\alpha + 2\beta = 180°$

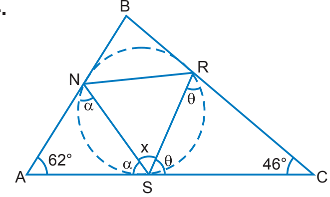
$\theta + 2(\alpha + \beta) = 180°$

$\theta + 2(50°) = 180°$

$\therefore\ \theta = 80°$

Clave C

14.



Por dato, NRS es el triángulo tangencial del $\triangle ABC$.

En el $\triangle ANS$: $2\alpha + 62° = 180° \Rightarrow \alpha = 59°$

En el $\triangle CSR$: $2\theta + 46° = 180° \Rightarrow \theta = 67°$

Del gráfico:

$x + \alpha + \theta = 180°$

$x + 59° + 67° = 180°$

$x + 126° = 180°$

$\therefore x = 54°$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 21) Unidad 1

Comunicación matemática

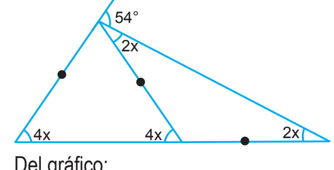
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. Piden: x



Del gráfico:

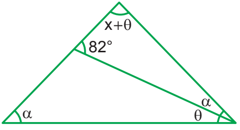
$4x + 2x = 54°$

$6x = 54°$

$\therefore\ x = 9°$

Clave C

5. Piden: x



Del gráfico:

$\alpha + \theta = 82°$ ...(1)

También:

$82° + x + \theta + \alpha = 180°$

$\alpha + \theta + x = 98°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

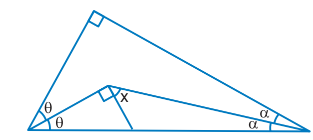
$82° + x = 98°$

$\therefore\ x = 16°$

Clave A

6. Piden: x





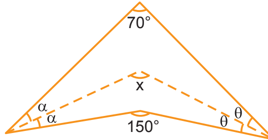
Por propiedad:

$90° + x = 90° + \dfrac{90°}{2}$

$\therefore\ x = 45°$

Clave C

7. Piden: x



Por propiedad:

$\alpha + \theta + 70° = x$ ...(1)

También:

$\alpha + x + \theta = 150°$

$\alpha + \theta = 150° - x$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

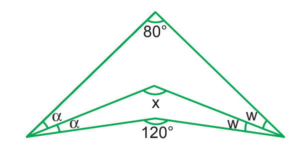
$150° - x + 70° = x$

$220° = 2x$

$\therefore\ x = 110°$

Clave A

8. Piden: x



Por propiedad:

$x = \alpha + w + 80°$

$x - 80° = \alpha + w$ ...(1)

También:

$120° = \alpha + x + w$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

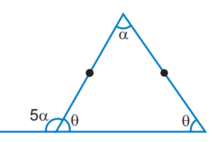
$120° = x - 80° + x$

$200° = 2x$

$\therefore\ x = 100°$

Clave B

9.



Del gráfico:

$\theta + \alpha = 5\alpha \quad \wedge \quad 2\theta + \alpha = 180°$

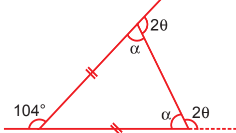
$\theta = 4\alpha \qquad 2\theta + \dfrac{\theta}{4} = 180°$

$\alpha = \dfrac{\theta}{4} \qquad \dfrac{9\theta}{4} = 180°$

$\therefore\ \theta = 80°$

Clave E

10.



Por suma de ángulos exteriores:

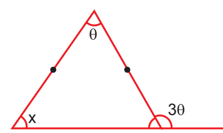
$2\theta + 2\theta + 104° = 360°$

$4\theta = 256°$

$\therefore\ \theta = 64°$

Clave A

11.



Del gráfico:

$x + \theta = 3\theta \quad \wedge \quad 2x + \theta = 180°$

$x = 2\theta \qquad 2x + \dfrac{x}{2} = 180°$

$\theta = \dfrac{x}{2} \qquad \dfrac{5x}{2} = 180°$

$\therefore\ x = 72°$

Clave B

12.

Del gráfico:

$4x + 2x + 3x = 180° \quad \wedge \quad 2\theta = 3x$

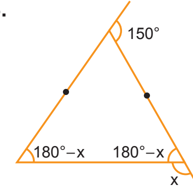
$9x = 180° \qquad 2\theta = 60°$

$x = 20° \qquad \therefore\ \theta = 30°$

Clave C



13.



Por ángulo exterior:

$(180° - x) + (180° - x) = 150°$

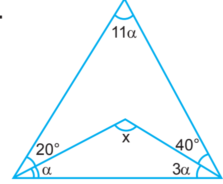
$360° - 2x = 150°$

$2x = 210°$

$\therefore\ x = 105°$

Clave E

14.



Por suma de ángulos interiores:

$20° + \alpha + 40° + 3\alpha + 11\alpha = 180°$

$15\alpha = 120°$

$\alpha = 8°$

Luego:

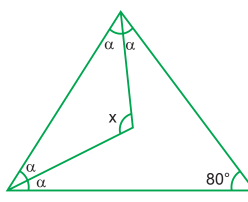
$x = 180° - 4\alpha$

$x = 180° - 4(8°)$

$\therefore\ x = 148°$

Clave C

15.



Por suma de ángulos interiores:

$2\alpha + 2\alpha + 80° = 180°$

$4\alpha = 100°$

$\alpha = 25°$

Por propiedad:

$x = 80° + \alpha + \alpha$

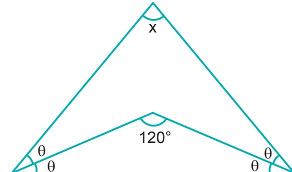
$x = 80° + 2\alpha = 80° + 2(25°)$

$x = 80° + 50°$

$\therefore\ x = 130°$

Clave E

16.



Por suma de ángulos interiores:

$\theta + \theta + 120° = 180°$

$2\theta = 60°$

$\theta = 30°$

Luego:

$2\theta + x + 2\theta = 180°$

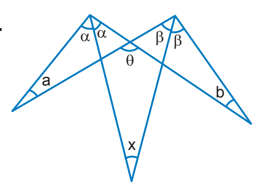
$x + 4\theta = 180°$

$x + 4(30°) = 180°$

$\therefore x = 60°$

Clave E

17.



Dato:

$a + b = 40°$

Del gráfico:

$\theta = 2\beta + b$

$\theta = 2\alpha + a$ (+)

$2\theta = 2\alpha + 2\beta + a + b$ ...(I)

Por propiedad:

$\theta = \alpha + \beta + x$

$2\theta = 2\alpha + 2\beta + 2x$ ...(II)

De (I) y (II):

$2x = a + b$

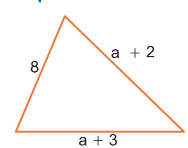
$2x = 40°$

$\therefore\ x = 20°$

Clave B

Resolución de problemas

18.



Por teorema de la existencia:

$(a + 3) - (a + 2) < 8 < (a + 3) + (a + 2)$

$1 < 8 < 2a + 5$

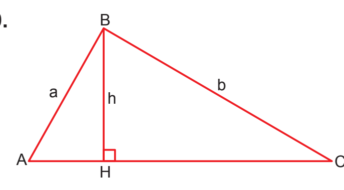
$3 < 2a$

$1.5 < a$

$\therefore\ a = 2$ (menor valor entero)

Clave C

19.



Dato:

$a + b = 15$ ...(1)

De la figura:

$h < a$

$h < b$ (+)

$2h < a + b$

$h < \dfrac{a + b}{2}$ ...(2)

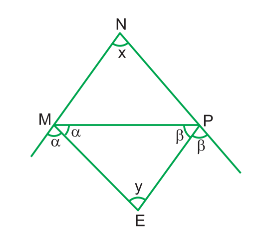
(1) en (2):

$h < 7{,}5$

$\therefore h = 7$ (máximo valor entero)

Clave B

20.



Dato:

$2m\angle N + m\angle MEP = 117°$

$\Rightarrow 2x + y = 117°$ ...(1)

Por propiedad:

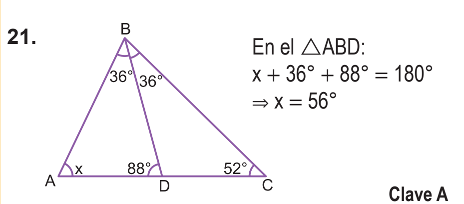
$y = 90° - \dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow x + 2y = 180°$ ...(2)

Resolviendo (1) y (2): $x = 18°$

Clave B

21.



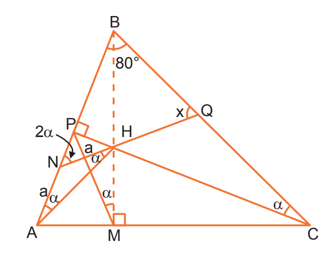
En el $\triangle ABD$:

$x + 36° + 88° = 180°$

$\Rightarrow x = 56°$

Clave A

22.



Nos piden: x

En la figura ⏢APHM y ⏢MPBC son inscriptibles.

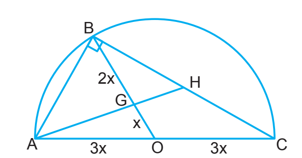
En ◺BPC: $\alpha = 10°$

Luego en el $\triangle NBQ$: $x + 80° + 2\alpha = 180°$

$\Rightarrow x = 80°$

Clave B

23.



Nos piden: $x = OG$

Como G es baricentro:

$\Rightarrow BG = 2(GO)$

$BG = 2x$

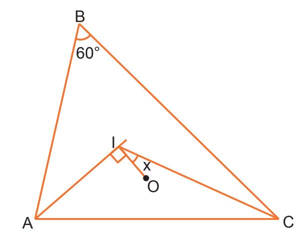
Como O es circuncentro:

$\Rightarrow BO = AO = OC = 3x$

$\therefore\ OG = \dfrac{AC}{6}$

Clave C

24.



Nos piden: x

Como I es incentro:

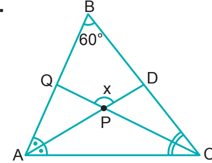
$m\angle AIC = 90° + \dfrac{60°}{2} = 120°$

$\Rightarrow 90° + x = 120°$

$x = 30°$

Clave C

25.



Nos piden: x

Como $\overline{AD}$ y $\overline{CQ}$ son bisectrices interiores, P es incentro.

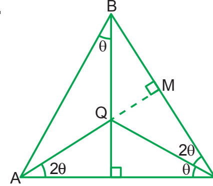
Por propiedad:

$x = 90° + \frac{60°}{2}$

$x = 120°$

Clave C

26.



Nos piden: θ

Q: ortocentro

AM es altura

Luego:

$5\theta = 90°$

$\theta = 18°$

Clave B

Nivel 2 (página 23) Unidad 1

Comunicación matemática

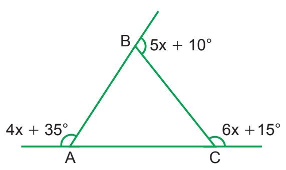
27.

28.

29.

Razonamiento y demostración

30.



Por suma de ángulos exteriores:

$4x + 35° + 5x + 10° + 6x + 15° = 360°$

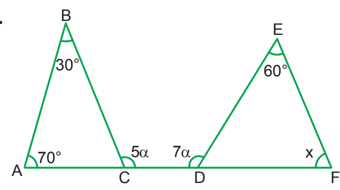
$15x + 60° = 360°$

$15x = 300°$

$\therefore\ x = 20°$

Clave A

31.



En el △ABC:

$70° + 30° = 5\alpha$

$100° = 5\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 20°$

En el △FED:

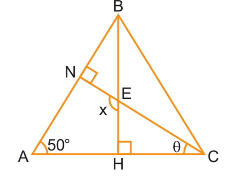
$x + 60° = 7\alpha$

$x = 7(20°) - 60°$

$\therefore\ x = 80°$

Clave C

32.



En el ⊿ANC:

$50° + \theta = 90° \Rightarrow \theta = 40°$

En el ⊿EHC:

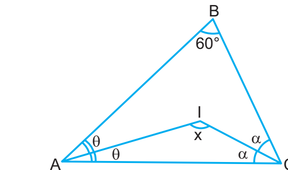
$x = 90° + \theta$

$x = 90° + 40°$

$\therefore\ x = 130°$

Clave D

33.



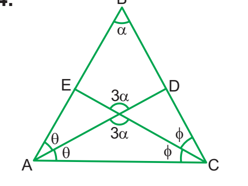
Por propiedad:

$x = 90° + \frac{60°}{2} = 90° + 30°$

$\therefore\ x = 120°$

Clave C

34.



Por propiedad:

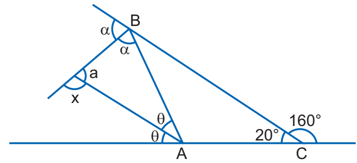
$3\alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{5\alpha}{2} = 90°$

$\therefore\ \alpha = 36°$

Clave D

35.



Por propiedad:

$a = 90° - \frac{20°}{2} = 90° - 10° = 80°$

$\Rightarrow a = 80°$

Del gráfico:

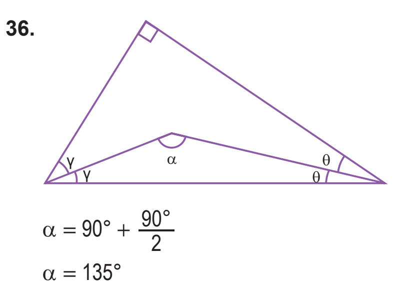
$x + a = 180°$

$x + 80° = 180°$

$\therefore\ x = 100°$

Clave C

36.



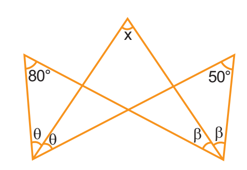
$\alpha = 90° + \frac{90°}{2}$

$\alpha = 135°$

Piden: $S_{(\alpha)} = 180° - 135° = 45°$

Clave C

37.

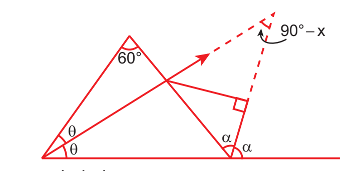


$x = \frac{80° + 50°}{2}$

$x = 65°$

Clave E

38. Piden: x



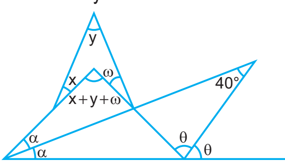
Por propiedad:

$90° - x = \frac{60°}{2}$

$x = 60°$

Clave B

39. Piden: $x + y + \omega$



Por propiedad:

$\frac{x + y + \omega}{2} = 40°$

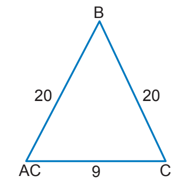
$\Rightarrow x + y + \omega = 80°$

Clave A

Resolución de problemas

40. Se presentan dos casos:

I.



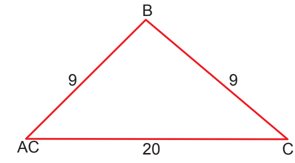
Por desigualdad triangular:

$20 - 20 < AC < 20 + 20$

$0 < 9 < 40$ ...(Verdadero)

$\Rightarrow 2p_{ABC} = 49$

II.



Por desigualdad triangular:

$9 - 9 < AC < 9 + 9$

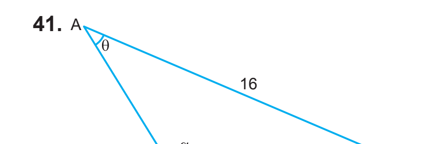
$0 < 20 < 18$ ...(Falso)

Entonces, el △ABC no existe.

Por lo tanto, el perímetro del triángulo es 49.

Clave D

41.



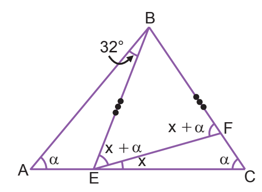
Por desigualdad triangular:
$16 - 4 < x < 16 + 4$
$12 < x < 20$ ...(1)

Por dato: $\alpha > 90°$
Entonces θ y ω deben ser agudos.
$(\theta < 90°)$
$\Rightarrow \alpha > \theta$, luego por correspondencia triangular:
$16 > x$ ...(2)

De (1) y (2): $12 < x < 16$
Por lo tanto, el mayor valor entero de x es 15.

Clave B

42.



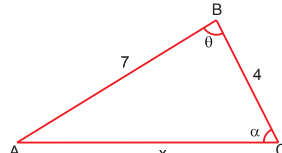
Piden: $m\angle FEC = x$
Por dato: $AB = BC$
$\Rightarrow m\angle A = m\angle C = \alpha$

Además: $BE = BF$
$\Rightarrow m\angle BFE = m\angle BEF = x + \alpha$

En el $\triangle ABE$:
$\alpha + 32° = x + \alpha + x$
$32° = 2x$
$\therefore\ x = 16°$

Clave A

43.



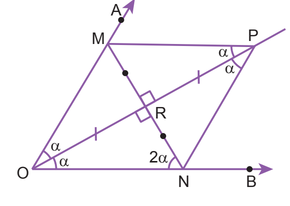
Por dato: $\alpha < \theta$
Entonces por correspondencia triangular:
$7 < x$ ...(1)

Por desigualdad triangular:
$x < 7 + 4$
$x < 11$ ...(2)

De (1) y (2): $7 < x < 11$
valores enteros de x: {8; 9; 10}
Por lo tanto, x puede tomar 3 valores enteros.

Clave C

44.



Por dato: $OM = MN$

En el ⊿ORN:
$\alpha + 2\alpha = 90°$
$3\alpha = 90°$
$\Rightarrow \alpha = 30°$

Piden:
$m\angle MPN = 2\alpha = 2(30°) = 60°$
$\therefore\ m\angle MPN = 60°$

Clave D

45.

Por dato: G es baricentro del ⊿ABC
Por propiedad: $AM = MC = BM$
Luego: $3x = 6$
$\therefore\ x = 2$

Clave B

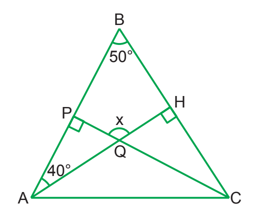
46.

Por dato: G es baricentro del $\triangle ABC$
$\Rightarrow BG = 2GM$
$10 = 2GM \Rightarrow GM = 5$

Por propiedad: $BM = AM = MC = 15$
$\therefore\ x = 30$

Clave C

47.



En el ⊿APQ:
$40° + 90° = x$
$\therefore\ x = 130°$

Clave D

Nivel 3 (página 25) Unidad 1

Comunicación matemática

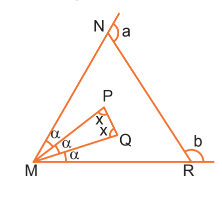
48.

49.

50.

Razonamiento y demostración

51.

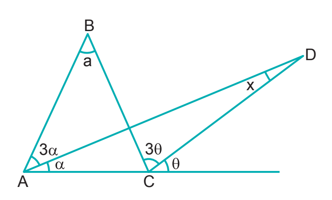


Por dato: $a + b = 240°$
En el $\triangle MNR$, por propiedad:
$3\alpha + 180° = a + b$
$3\alpha = (240°) - 180°$
$\Rightarrow \alpha = 20°$

En el $\triangle MPQ$:
$\alpha + x + x = 180°$
$2x = 180° - \alpha = 180° - 20°$
$2x = 160°$
$\therefore x = 80°$

Clave C

52.



En el $\triangle ABC$:
$4\alpha + a = 4\theta \Rightarrow \frac{a}{4} = \theta - \alpha$ ...(1)

En el $\triangle ADC$:
$\alpha + x = \theta \Rightarrow x = \theta - \alpha$ ...(2)

De (1) y (2):
$\therefore\ x = \frac{a}{4}$

Clave C

53.

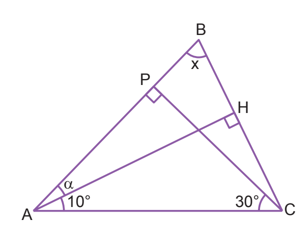
En el ⊿ADM: $\theta + \alpha = 90°$
$\alpha = 90° - \theta$ ...(1)

En el ⊿ABE: $\theta + \omega = 90°$
$\omega = 90° - \theta$ ...(2)

De (1) y (2): $\alpha = \omega$
Entonces el $\triangle MBE$ es isósceles:
$BM = BE$
$\therefore\ BE = 4$

Clave A

54.

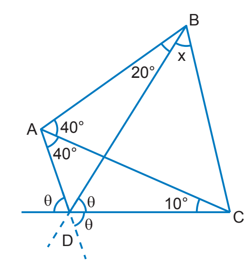


En el ⊿APC:
$\alpha + 10° + 30° = 90°$
$\Rightarrow\ \alpha = 50°$

En el ⊿AHB:
$\alpha + x = 90°$
$50° + x = 90°$
$\therefore x = 40°$

Clave B

55.



Por propiedad: $m\angle ABD = 20°$

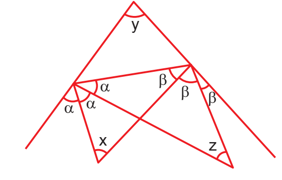
Dato: AC = BC

Luego: $x + 20° = 40°$

$x = 20°$

Clave E

56.



Del gráfico:

$x + 2\alpha + \beta = 180°$

$z + 2\beta + \alpha = 180°$

Entonces:

$x + z + 3\alpha + 3\beta = 360°$ ...(I)

Luego:

$y + (180° - 3\alpha) + (180° - 3\beta) = 180°$

$y + 180° = 3\alpha + 3\beta$ ...(II)

Reemplazando (II) en (I):

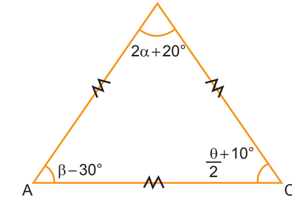
$x + y + z + 180° = 360°$

$\therefore\ x + y + z = 180°$

Clave D

Resolución de problemas

57.



$2\alpha + 20° = 60°$

$\alpha = 20°$

$\beta - 30° = 60°$

$\beta = 90°$

$\frac{\theta}{2} + 10° = 60°$

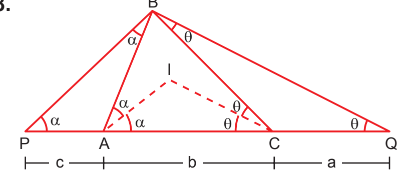
$\theta + 20° = 120°$

$\theta = 100°$

Piden: $\alpha + \beta + \theta = 210°$

Clave B

58.



$\overline{PB} // \overline{AI} \Rightarrow m\angle PBA = \alpha$

$\triangle ABP$ es isósceles $\Rightarrow PA = c$

$\overline{BQ} // \overline{IC} \Rightarrow m\triangle CBQ = \theta$

$\triangle CBQ$ es isósceles $\Rightarrow CQ = a$

Luego:

$PQ = a + b + c$

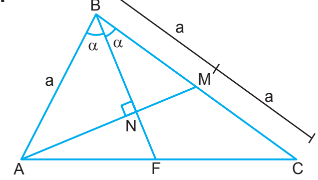
Dato:

$a + b + c = 16$

$\therefore\ PQ = 16$

Clave B

59.



$\overline{BN}$ es altura y bisectriz

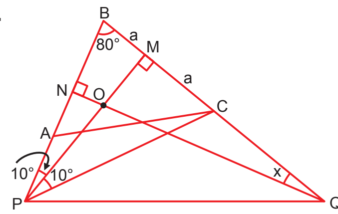
$\Rightarrow \triangle ABM$ es isósceles

Piden: $E = \frac{AB}{BM} + \frac{BC}{AB} + \frac{AB}{CM}$

$\therefore\ E = \frac{a}{a} + \frac{2a}{a} + \frac{a}{a} = 4$

Clave C

60.



Nos piden: x

Como O es ortocentro del $\triangle PBQ$

$\Rightarrow \overline{PM}$ y $\overline{QN}$ son alturas.

Luego, se tiene que como O es circuncentro del $\triangle ABC$, BM = MC.

$\triangle BPC$ es isósceles, $m\angle BPM = 10°$

$\Rightarrow m\angle PBQ = 80°$

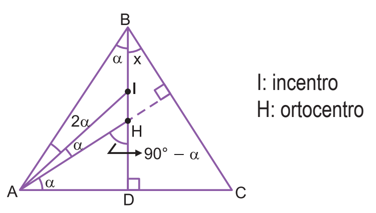
Del $\triangle NBQ$:

$x + 80° = 90°$

$\Rightarrow x = 10°$

Clave D

61.



Nos piden: x

Como I es incentro: $x = \alpha$

Se observa que $m\angle AHD = 90° - \alpha$

$\Rightarrow m\angle HAD = \alpha$

$m\angle BAI = 2\alpha$

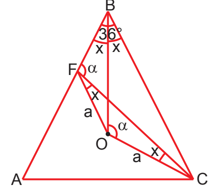
Luego del ◺ADB:

$5\alpha = 90°$

$\alpha = 18°$

Clave E

62.



Nos piden: x

$\triangle ABC$ isósceles.

O: circuncentro del $\triangle AFC$

Del gráfico:

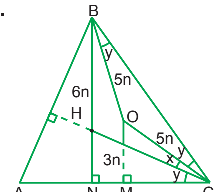
⏢COFB inscriptible.

Luego: $2x = 36°$

$x = 18°$

Clave B

63.



Nos piden: x + y

Por propiedad sabemos que:

$m\angle HCA = m\angle BCO = y$

Luego: $OM = \frac{BH}{2} = \frac{6n}{2} = 3n$

Del ◺OMC tenemos:

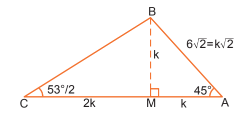
$y + x = 37°$

Clave B

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 27) Unidad 1

1.



Se traza: $\overline{BM} \perp \overline{AC}$

Del ⊾AMB notable de 45°:

$AB = 6\sqrt{2}$

$k\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow K = 6$

$\Rightarrow BM = 6 \wedge AM = 6$

Del ⊾BMC notable de 53°/2:

$CM = 2BM \Rightarrow CM = 12$

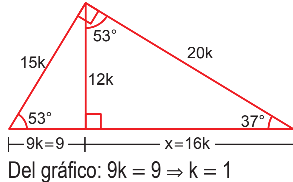
Piden:

$AC = AM + MC = 6 + 12$

$\therefore AC = 18$

Clave A

2.



Del gráfico: $9k = 9 \Rightarrow k = 1$

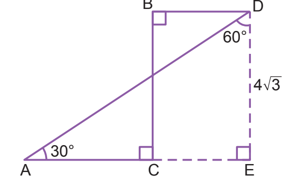
Como:

$x = 16k = 16(1)$

$\therefore x = 16$

Clave B

3.



Prolongamos AC y trazamos la altura DE.

Se observa:

$DE = BC = 4\sqrt{3}$

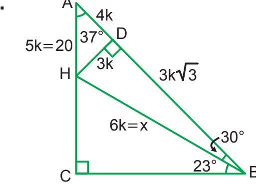
Del ⊾AED notable de 30° y 60°:

$AD = 2DE = 2(4\sqrt{3})$

$\therefore AD = 8\sqrt{3}$

Clave C

4.



Del gráfico:

$m\angle HBA = 30°$

Trazamos $\overline{HD} \perp \overline{AB}$.

Del ⊾ADH, notable de 37° y 53°:

$HD = 12 \wedge AD = 16$

Del ⊾HDB notable de 30° y 60°:

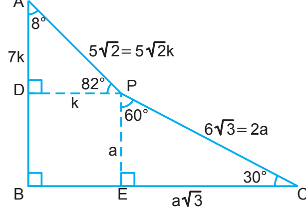
$HD = 12 \wedge BD = 12\sqrt{3}$

Piden:

$BH = 2HD = 24$

Clave C

5.



Del ⊾ADP notable de 8° y 72°:

$5\sqrt{2}k = 5\sqrt{2} \Rightarrow k = 1$

$\Rightarrow DP = k = 1$

Del ⊾PEC notable de 30° y 60°:

$2a = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

$EC = a\sqrt{3} = (3\sqrt{3})\sqrt{3} = 9$

Piden:

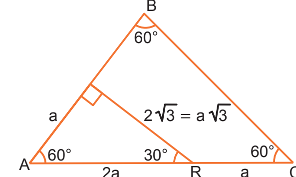
$BC = BE + EC$

$BC = DP + EC$

$\therefore BC = 1 + 9 = 10$

Clave C

6.



Por dato: el △ABC es equilátero

Además: AR = 2RC

Luego:

$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

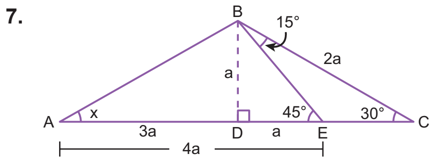
Piden el perímetro del △ABC (2p):

$2p = 3(AC) = 3(3a)$

$\therefore 2p = 9a = 18$

Clave B

7.



Sea BC = 2a

Por dato: AE = 2BC = 4a

Del ⊾BDC de 30° y 60°:

$BD = \frac{BC}{2} \Rightarrow BD = a$

Del ⊾BDE notable de 45°:

$DE = BD = a$

Como:

$AE = AD + DE$

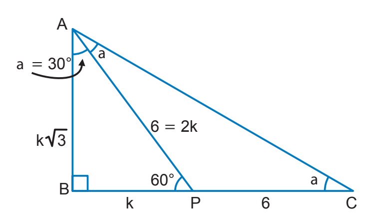
$4a = AD + a \Rightarrow AD = 3a$

Luego, el ⊾ADB es notable de 37°/2.

$\therefore x = \frac{37°}{2} = 18{,}5°$

Clave C

8.



En el triángulo ABC:

$2a + a = 90°$

$3a = 90° \Rightarrow a = 30°$

Del ⊾ABP notable de 30° y 60°:

$2k = 6 \Rightarrow k = 3$

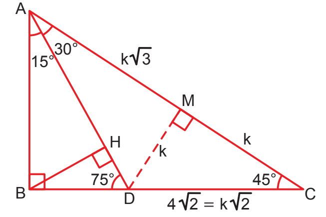
Piden:

$AB = k\sqrt{3} = (3)\sqrt{3}$

$\therefore AB = 3\sqrt{3}$

Clave D

9.



Trazamos la altura DM.

Del ⊾DMC notable de $4\sqrt{2} = k\sqrt{2}$:

$k\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow k = 4$

Del ⊾AMD notable de 30° y 60°:

$AD = 2k = 8$

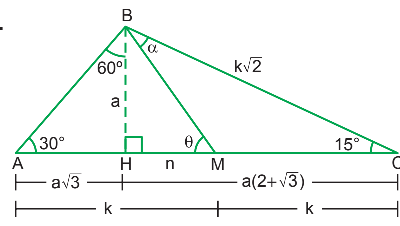
Del ⊾ABD de 15° y 75°, por propiedad:

$BH = \frac{AD}{4} = \frac{8}{4}$

$\therefore BH = 2$

Clave D

10.



Trazamos la altura BH.

Sea: AC = 2k

Entonces:

$a\sqrt{3} + a(2 + \sqrt{3}) = 2k$

$a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{3} = 2k$

$2a(\sqrt{3} + 1) = 2k$

$\Rightarrow a(\sqrt{3} + 1) = k$

Además:

$AM = k = a(\sqrt{3} + 1)$

$a\sqrt{3} + n = a\sqrt{3} + a$

$\Rightarrow n = a$

Entonces en el ⊾BHM: $\theta = 45°$

En el triángulo BMC:

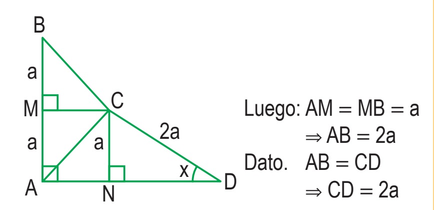
$\alpha + 15° = \theta$

$\alpha + 15° = 45°$

$\therefore \alpha = 30°$

Clave C

11. Trazamos las alturas CM y CN en los triángulos BCA y ACD respectivamente, como BC = CA, CM es mediatriz de AB.

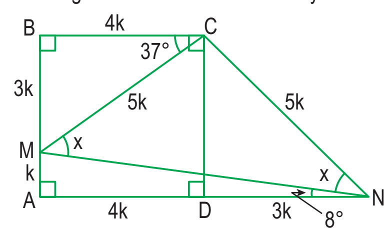


Luego: AM = MB = a
$\Rightarrow$ AB = 2a
Dato. AB = CD
$\Rightarrow$ CD = 2a

También MA = CN pues AM // CN y MC // AN el triángulo CND es notable pues
CD = 2a, CN = a y ND = $a\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ es un triángulo notable de 30° y 60°
$\therefore$ x = 30°

Clave D

12. El triángulo MBC es notable de 37° y 53°

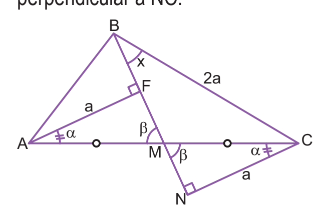


$\Rightarrow$ MC = 5K; MB = 3K; BC = 4K
como AB = BC $\Rightarrow$ MA = AB – BM
MA = K

El triángulo MAN es notable de 8° y 82°
$\Rightarrow$ MA = K y AN = 7K
$\therefore$ DN = AN – AD $\Rightarrow$ DN = 3K
Como CD = 4K y DN = 3K, entonces CN = 5K
$\therefore$ △ MCN es isósceles, luego como BC // AN
$\Rightarrow$ se cumple 37° + 8° = x $\Rightarrow$ x = 45°

Clave C

13. Prolongamos BM hasta N de tal modo que BN es perpendicular a NC.



Luego: m∠ FAM = α
m∠ FMA = β
El ◺AFM ≅ ◺MNC ya que tiene dos ángulos iguales y un lado congruente (caso LAL) pues AM = MC $\Rightarrow$ NC = AF = a;
Luego el ◺BNC es notable pues BC = 2a y NC = a
$\therefore$ x = 30°

Clave D

14. El ◺ AED es notable de 37° y 53° $\Rightarrow$ DA = 5.
Se traza la altura CH, luego el ◺ CHB es notable de 30° y 60°
$\therefore$ CH = x/2, pero CH = DA = 5 $\Rightarrow$ x = 10

Clave D

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 29) Unidad 1

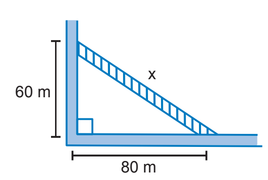
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

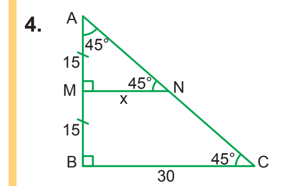
3.



Sea la longitud de la escalera: x
Por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 60^2 + 80^2$
$x^2 = 10\,000$
$\therefore$ x = 100 m

Clave B

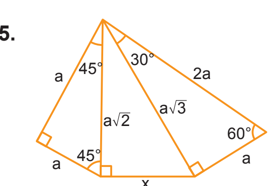
4.



El ◺ABC es notable de 45°, entonces: AB = 30.
Del ◺AMN notable de 45°: MN = 15.
$\therefore$ x = 15

Clave A

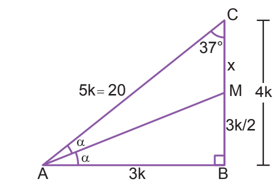
5.



Por el teorema de Pitágoras:
$(a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{2})^2 + x^2$
$3a^2 = 2a^2 + x^2$
$a^2 = x^2$
$\therefore$ x = a

Clave A

6.

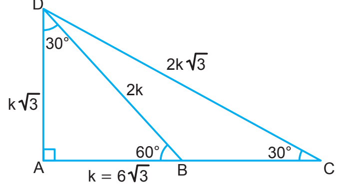


En el ◺ABC: 2α + 37° = 90°
$\Rightarrow$ $a = \dfrac{53°}{2}$
Entonces en el ◺ABM: AB = 2MB
Del gráfico: 5k = 20 $\Rightarrow$ k = 4
Además: $x + \dfrac{3k}{2} = 4k$

$\Rightarrow x = \dfrac{5k}{2} = \dfrac{5(4)}{2}$
$\therefore$ x = 10

Clave C

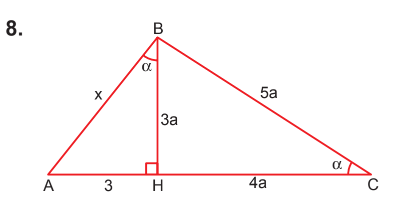
7.



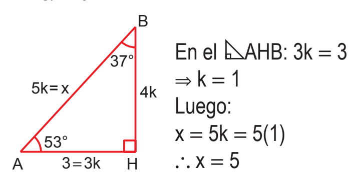
Del gráfico: $k = 6\sqrt{3}$
Piden:
$CD = 2k\sqrt{3} = 2(6\sqrt{3})\sqrt{3} = 36$
$\therefore$ CD = 36

Clave E

8.



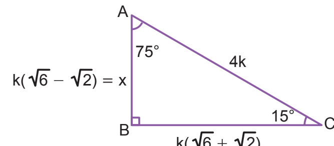
Por el teorema de Pitágoras: BH = 3a
El ◺BHC es notable de 37° y 53°.
$\Rightarrow$ α = 37°



En el ◺AHB: 3k = 3
$\Rightarrow$ k = 1
Luego:
x = 5k = 5(1)
$\therefore$ x = 5

Clave B

9.

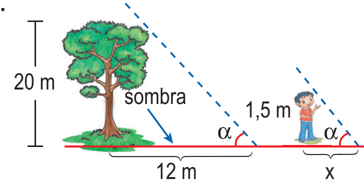


Por dato: $AC = 8(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$4k = 8(\sqrt{6} + \sqrt{2})$
$\Rightarrow k = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

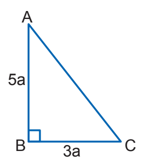
Luego:
$x = k(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
$x = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
x = 2(6 – 2) = 2(4)
$\therefore$ x = 8

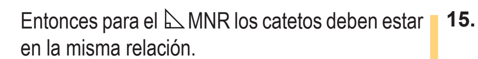
Clave C

10.



Del ◺ABC, obtenemos la relación entre los catetos:





Entonces para el ◺MNR los catetos deben estar en la misma relación.

$\therefore 1{,}5 = 5a \Rightarrow\ a = 0{,}3$

Luego:

$x = 3a = 3(0{,}3) = 0{,}9$

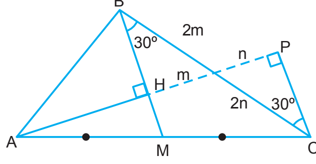
$x = 0{,}9\ m\left(\dfrac{100\ cm}{1\ m}\right) = 90\ cm$

$\therefore x = 90\ cm$

Clave A

Resolución de problemas

11.



Por dato:

$2m + 2n = 16$

$m + n = 8$

Por propiedad:

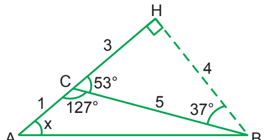
$AH = HP$

$AH = m + n$

$\therefore\ AH = 8$

Clave D

12.

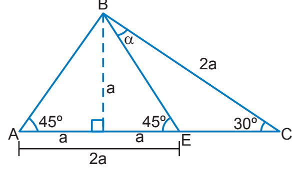


El ◺ AHB, resulta notable de 45°:

$\therefore\ m\angle BAC = 45°$

Clave E

13.



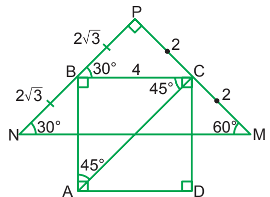
Por ángulo exterior:

$30° + \alpha = 45°$

$\therefore\ \alpha = 15°$

Clave D

14.



En el ◺ NPM (notable de 30° y 60°)

$NP = 4\sqrt{3}\quad \wedge\quad NM = 8$

Por el teorema de los puntos medios:

$BC = \dfrac{NM}{2}$

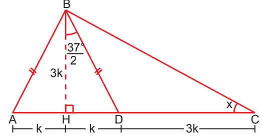
$\Rightarrow BC = 4$

En el ◺ ABC (notable de 45°)

$AC = 4\sqrt{2}$

Clave E

15.



Por dato: $3AD = 2DC$

$\Rightarrow AD = 2k \wedge DC = 3k$

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AD}$:

En el ◺ BHD notable de 37°/2:

$\Rightarrow\ BH = 3k$

En el ◺ BHC:

$\tan(x) = \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ x = 37°$

Clave C

Nivel 2 (página 16) Unidad 1

Comunicación matemática

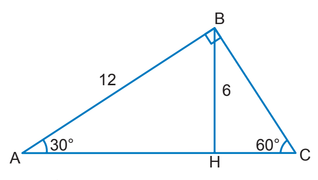
16.

17.

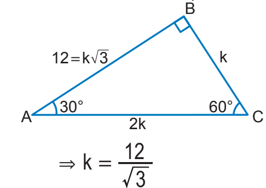
18.

Razonamiento y demostración

19. Piden: AC



En el ◺ABC se cumple:

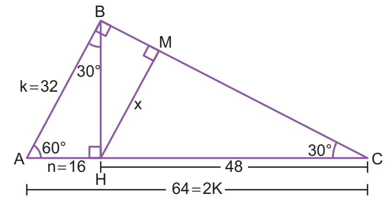


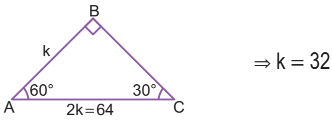
$\Rightarrow k = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ AC = 2k = \left(\dfrac{24}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = 8\sqrt{3}$

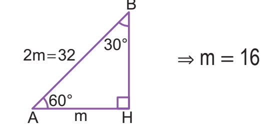
Clave A

20. Piden: HM

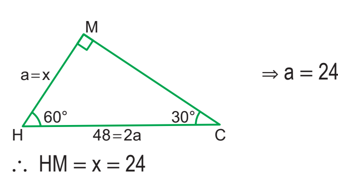




$\Rightarrow k = 32$



$\Rightarrow m = 16$



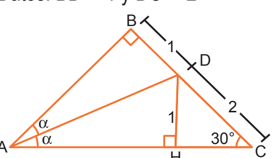
$\Rightarrow a = 24$

$\therefore\ HM = x = 24$

Clave D

21. Piden: α

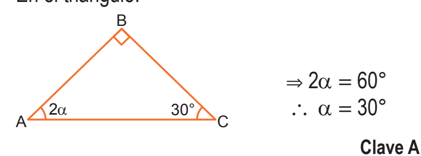
Datos: $BD = 1$ y $DC = 2$



Trazamos $\overline{DH}$ que por propiedad de bisectriz: $DH = 1$

$\therefore$ Si $DC = 2$ y $HD = 1 \Rightarrow\ m\angle DCH = 30$

En el triángulo:

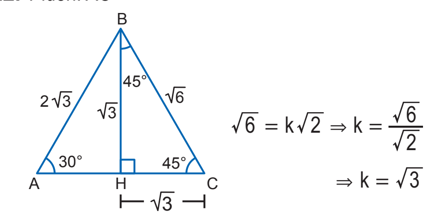


$\Rightarrow 2\alpha = 60°$

$\therefore\ \alpha = 30°$

Clave A

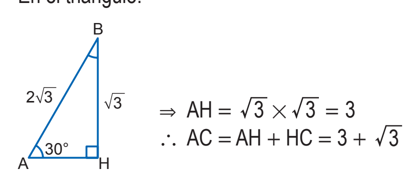
22. Piden: AC



$\sqrt{6} = k\sqrt{2} \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow k = \sqrt{3}$

En el triángulo:



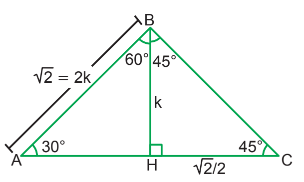
$\Rightarrow\ AH = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$\therefore\ AC = AH + HC = 3 + \sqrt{3}$

Clave C

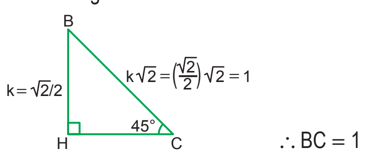
23. Piden: BC

Dato: $AB = \sqrt{2}$



Trazamos la altura BH.

En el triángulo:



$\therefore BC = 1$

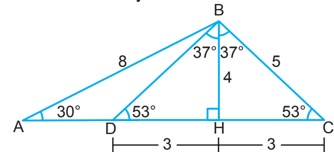
Clave C



24. Piden: CD



Datos: AB = 8 y BD = BC = 5

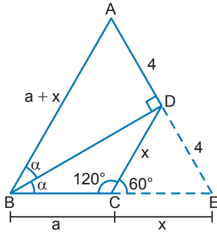


Trazamos $\overline{BH}$ (altura).
Del gráfico:
DC = 3 + 3 = 6 m

Clave C

Resolución de problemas

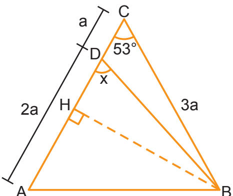
25.



Prolongamos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.
$\overline{BD}$ es altura y bisectriz, entonces:
BA = BE
Por dato: AB = BC + CD
⇒ AB = a + x ∧ CE = x
En el △CDE equilátero:
x = 4

Clave B

26.



En el △ABC isósceles:
AC = BC = 3a
Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
En el ⊿ CHB notable de 37° y 53°:

$$BH = 3a\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{12a}{5}$$

$$CH = 3a\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9a}{5}$$

Del gráfico:
DH = CH – DC

$$\Rightarrow DH = \frac{9a}{5} - a = \frac{4a}{5}$$

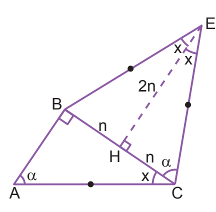
En el ⊿ DHB:

$$\tan(x) = \frac{BH}{DH} = \frac{\frac{12a}{5}}{\frac{4a}{5}} = 3$$

⇒ x = 71,5° = 143°/2

Clave B

27.



Trazamos EH = BC:
⇒ BH = HC

Además:
⊿ ABC ≅ ⊿ CHE (caso ALA)
⇒ HE = 2n

En el ⊿ EHC:

$$\tan(x) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

∴ x = 53°/2

Clave A

Nivel 3 (página 31) Unidad 1

Comunicación matemática

28.

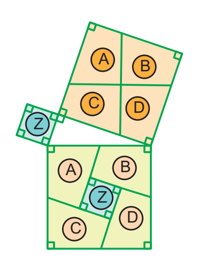
29. Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo (A)

$$(x + 1)^2 = (x - 1)^2 + x^2$$
$$\Rightarrow (x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x^2$$
$$(2x)(2) = x^2$$
$$\therefore\ x = 2$$

Vemos que al reemplazar en los triángulos B y C resultan los triángulos pitagóricos de 5, 12, 13 y 8, 15 ,17; entonces se confirma que x = 2

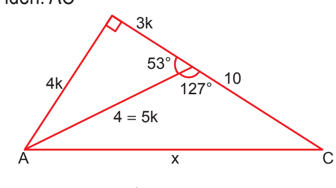
Clave B

30.



Razonamiento y demostración

31. Piden: AC

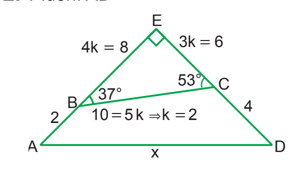


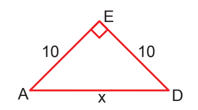
$$4 = 5k\ \Rightarrow\ k = \frac{4}{5}$$

$$x^2 = (4k)^2 + (3k + 10)^2$$
$$x^2 = 25k^2 + 60k + 100$$
$$x^2 = 25\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 60\left(\frac{4}{5}\right) + 100$$
$$x^2 = 164 = 4\ (41)$$
$$\therefore\ x = 2\sqrt{41}$$

Clave B

32. Piden: AD

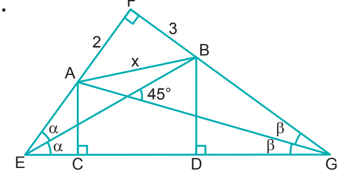




Por Pitágoras:
$x^2 = 10^2 + 10^2$
$x^2 = 200$
$x = 10\sqrt{2}$ m

Clave E

33.

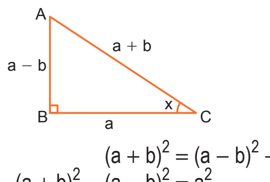


Del gráfico:
α + β = 45°
m∠EFG = 90°

Por el teorema de la bisectriz:
FB = BD = 3
FA = AC = 2
En el ⊿ AFB:
$x = \sqrt{2^2 + 3^2}$
$x = \sqrt{13}$

Clave E

34.

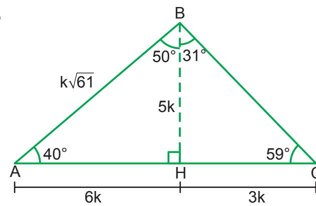


$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + a^2$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2$$
$$4ab = a^2$$
$$4b = a$$

Reemplazando en el ⊿ ABC se deduce:
x = 37°

Clave C

35.

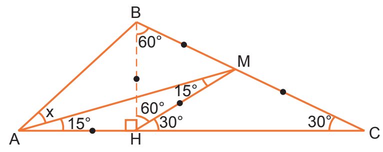


Trazamos BH = AC
En el ⊿ AHB notable de 40° y 50°:
BH = 5k; AH = 6k; AB = $k\sqrt{61}$
En el ⊿ BHC notable de 31° y 59°:
HC = 3k
Por dato: AC = 36
⇒ 6k + 3k = 36
k = 4
∴ AB = $4\sqrt{61}$

Clave C

Resolución de problemas

36.



Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

El $\triangle$AMH resulta isósceles: AH = HM

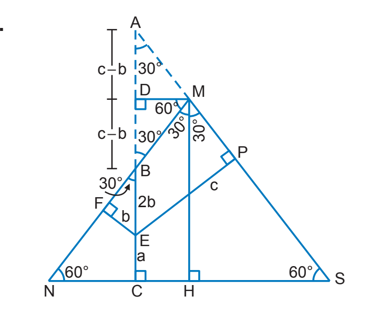
El ⊿AHB es notable de 45°:

$x + 15° = 45°$

$\therefore\ x = 30°$

Clave C

37.



Por dato: el $\triangle$NMS es equilátero

Prolongamos $\overline{SM}$ y $\overline{CB}$, entonces se forma el $\triangle$AMB isósceles.

Del ⊿BFE: BE = 2b

Del ⊿APE: AE = 2c

Entonces: AB = 2c – 2b, luego trazamos $\overline{MD} \perp \overline{AB}$ la cual la interseca en su punto medio.

Piden la altura del triángulo equilátero: MH

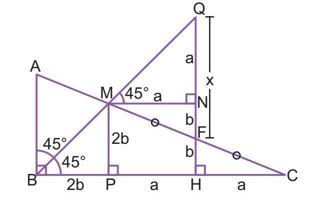
Del gráfico:

MH = DC = (c – b) + 2b + a = a + b + c

$\therefore$ MH = a + b + c

Clave B

38. Graficamos el $\triangle$ABC:



Se traza $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{BC}$ donde N∈QF

⇒ QN = a; NF = b ∧ x = a + b, donde QF = x

como $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ ⇒ m∠MQN = 45°

⊿MNQ es notable de 45° ⇒ QN = MN = a

Luego ⊿MNF ≅ ⊿FHC; (caso ALA)

⇒ MN = MC = a y NF = FM = b ⇒ NH = 2b

Luego como MNHP es un rectángulo

⇒ MN = PM = a y NH = MP = 2b

Y como ⊿BPM es notable de 45°

⇒ MP = BP = 2b

Luego. BP + P + MC = BC

⇒ 2b + a + a = 4

Dato: BC = 4

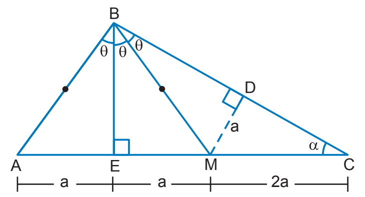
2(a + b) = 4

2x + 4 ⇒ x = 2

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 33) Unidad 1

1.



Trazamos $\overline{MD} \perp \overline{BC}$

Por el teorema de la bisectriz:

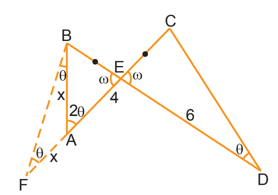
EM = MD = a

Entonces el ◺MDC es notable de 30° y 60°.

$\therefore\ \alpha = 30°$

Clave D

2.



Del gráfico: m∠FBE = m∠ECD

Se observa que:

△BEF ≅ △ECD (caso ALA)

Luego:

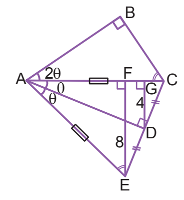
FE = ED

x + 4 = 6

$\therefore$ x = 2

Clave A

3.



Trazamos $\overline{AE}$ tal que: m∠EAD = m∠DAC

⇒ AE = AC ∧ CD = DE

Trazamos $\overline{EF} \perp \overline{AC}$

Por teorema de los puntos medios:

EF = 2DG ⇒ EF = 8

Del gráfico

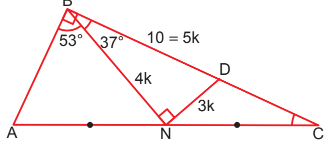
△ABC ≅ △AFE (caso ALA)

⇒ BC = EF

$\therefore$ BC = 8

Clave E

4.



Del gráfico: 5k = 10 ⇒ k = 2

Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

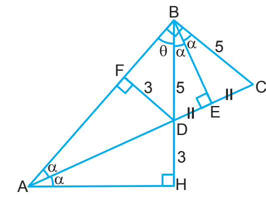
$BN = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow 4k = \dfrac{AC}{2}$

⇒ AC = 8k = 8(2)

$\therefore$ AC = 16

Clave D

5.



En el ◺AHB: 2α + θ = 90°

Trazamos $\overline{BE} \perp \overline{DC}$

En el triángulo DBC, $\overline{BE}$ es mediatriz.

⇒ BD = BC = 5

Trazamos $\overline{DF} \perp \overline{AB}$

Por el teorema de la bisectriz de un ángulo:

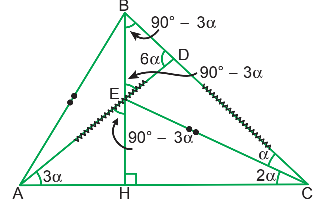
DF = DH = 3

Entonces el ◺DFB es notable de 37° y 53°:

$\therefore\ \theta = 37°$

Clave C

6.



Prolongamos $\overline{AE}$ hasta intersecar a $\overline{BC}$.

El △BDE resulta ser isósceles

⇒ BD = ED

Del gráfico:

△ABD ≅ △CED (caso LLL)

⇒ m∠ADB = m∠CDE = 6α

En el triángulo ADC:

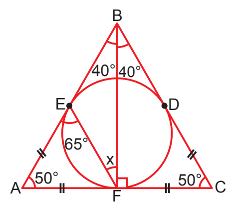
3α + 6α + 3α = 180°

12α = 180°

$\therefore\ \alpha = 15°$

Clave B

7.



Sabemos que: AE = AF = FC = CD

$\overline{BF}$ (mediatriz de $\overline{AC}$)

En el △EAF isósceles:

m∠AEF = m∠AFE = 65°

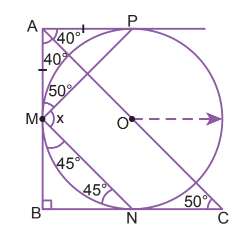
Por ángulo exterior:

40° + x = 65°

x = 25°

Clave C

8.



En el ◺ABC:

m∠BAC = 40° ⇒ m∠PAC = 40°

El △MAP es isósceles:

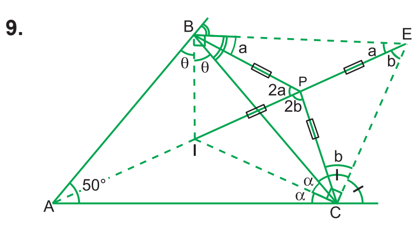
m∠AMP = 50°

⇒ 50° + x + 45° = 180°

x = 85°

Clave E

9.



Piden: m∠BPC

Por propiedad de bisectrices:

$m\angle BEC = 90° - \dfrac{50°}{2} = 65°$

En el ◺IBE:

BP = IP = PE

En el ◺ICE:

CP = IP = PE

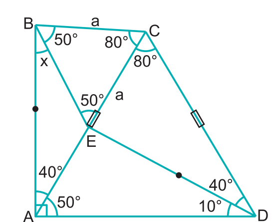
En el △BEC

a + b = 65°

⇒ m∠BPC = 2(a + b) = 2(65°) = 130°

Clave E

10.



Completando ángulos tenemos que el △ACD es isósceles ($\overline{AC} \cong \overline{CD}$)

⇒ △ACB ≅ △DCE (caso LLL)

⇒ BC = EC = a

En el △BCE isósceles:

m∠BEC = 50°

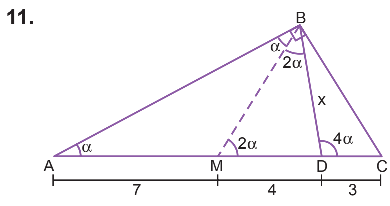
Por ángulo exterior:

40° + x = 50°

x = 10°

Clave A

11.



Trazamos la mediana BM.

⇒ AM = MB = MC

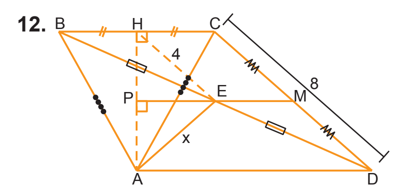
⇒ m∠ABM = α

En el △BDM isósceles:

x = 4m

Clave D

12.



En el △ isósceles BAC trazamos $\overline{AH} \perp \overline{BC}$

$\Rightarrow BH = HC$

Por el teorema de los puntos medios en el △BCD:

$HE = 4$

En el trapecio AHCD, $\overline{PM}$ es mediana:

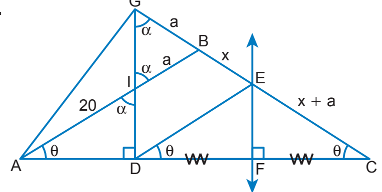
$\Rightarrow \overline{HP} = PA$

$\Rightarrow \overline{EP}$ es mediatriz de $\overline{HA}$

$\therefore\ x = 4$ m

Clave A

13.



Por dato $\overline{EF}$ es mediatriz, entonces:

$DF = FC$

$m\angle EDC = m\angle ECD = \theta$

Por el teorema de los puntos medios en el ⊿ GDC:

$GE = EC = x + a$

Además:

$\overline{AB} \,//\, \overline{DE}$ (dato) $\Rightarrow m\angle BAD = m\angle EDC = \theta$

En el △GBI isósceles:

$GB = IB = a$

Finalmente, en el △ABC (isósceles):

$20 + a = x + (x + a)$

$x = 10$

Clave C

14. Prolongamos $\overline{PQ}$ hasta que se interseque con la prolongación del lado BA en el punto R; luego los triángulos rectángulos REP y TFP son notables de 30° y 60° $\Rightarrow$ Si $EP = a \Rightarrow PR = 2a$

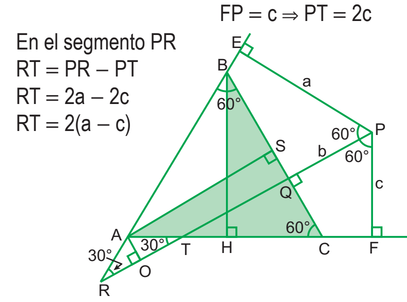
$FP = c \Rightarrow PT = 2c$

En el segmento PR

$RT = PR - PT$

$RT = 2a - 2c$

$RT = 2(a - c)$



Vemos que el △ADT es equilátero $\Rightarrow \overline{AO}$ es mediatriz.

$\therefore\ RO = OT = RT \Rightarrow OT = a - c$ nuevamente en el segmento PR:

$TQ = QT - QP \Rightarrow TQ = 2c - b$

Por paralelismo: $AS = OQ$; pero $OQ = OT + TQ$, reemplazando: $OQ = a - c + 2c - b$

$\Rightarrow OQ = AS = a + c - b$

Finalmente: △ASB ≅ △BHC, (caso L L L) $\Rightarrow AS = BM$

Reemplazando: $BM = PE + PF - PQ$

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 35) Unidad 1

Comunicación matemática

1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4. De los triángulos congruentes (caso ALA):

$x = 8$

$\therefore\ 3x - 18 = 3(8) - 18 = 6$

Clave E

5. Por propiedad:

$16 = \dfrac{2x + 2x}{2}$

$16 = 2x \Rightarrow x = 8$

Clave D

6. Por congruencia de triángulos:

$3a - 20 = a + 4$

$2a = 24 \Rightarrow a = 12$

Clave B

7. De la figura y por congruencia:

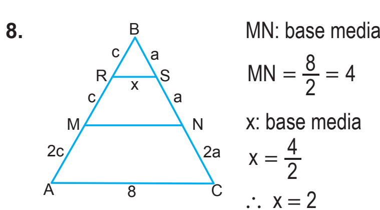
$\Rightarrow 3x - 6 = 12$

$3x = 18$

$\therefore\ x = 6$

Clave D

8.



MN: base media

$MN = \dfrac{8}{2} = 4$

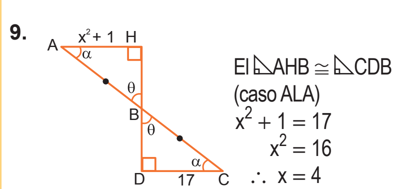
x: base media

$x = \dfrac{4}{2}$

$\therefore\ x = 2$

Clave B

9.



El ⊿AHB ≅ ⊿CDB (caso ALA)

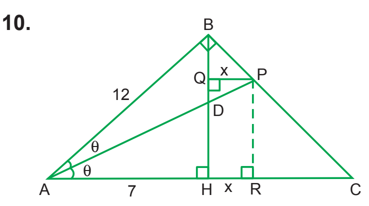
$x^2 + 1 = 17$

$x^2 = 16$

$\therefore\ x = 4$

Clave C

10.



Trazamos $\overline{PR} \perp \overline{AC}$.

Por el teorema de la bisectriz:

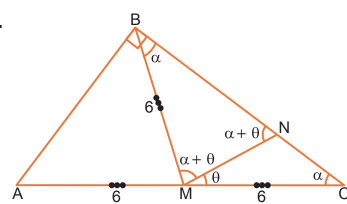
$AB = AR = AH + HR$

$12 = 7 + x$

$\therefore\ x = 5$

Clave C

11.



Por dato: $AM = MC = 6$

Por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$BM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

El △MBN, resulta isósceles.

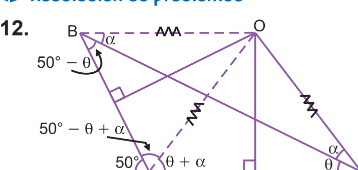
$\Rightarrow BN = BM$

$\therefore\ BN = 6$

Clave B

Resolución de problemas

12.



Por dato, O es circuncentro del △ABC:

$\Rightarrow OB = OC = OA$

$m\angle OAC = m\angle OCA = \alpha + \theta$

$m\angle ABO = m\angle OAB = 50° - \theta + \alpha$

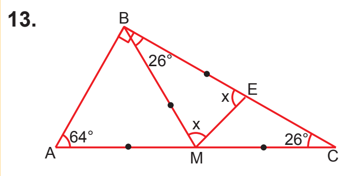
En el punto A:

$50° + (50° - \theta + \alpha) + \theta + \alpha = 180°$

$\alpha = 40°$

Clave C

13.



Por propiedad:

$BM = AM = MC$

El △BMC es isósceles $\Rightarrow m\angle MBC = 26°$

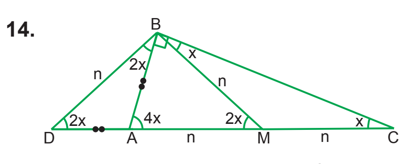
En el △BME (isósceles):

$26° + 2x = 180°$

$x = 77°$

Clave D

14.



En el triángulo rectángulo ABC, trazamos la mediana BM.

Luego: en el ⊿ ABC:

$4x + x = 90°$

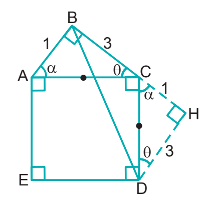
$5x = 90°$

$\therefore x = 18°$

Clave A

15.





El ⊿ABC ≅ ⊿CHD (caso ALA)
Por el teorema de Pitágoras
$BD^2 = 3^2 + 4^2$
$BD^2 = 25$
$\therefore\ BD = 5$

Clave B

Nivel 2 (página 36) Unidad 1

Comunicación matemática

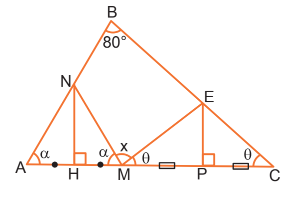
16.

17.

18.

Razonamiento y demostración

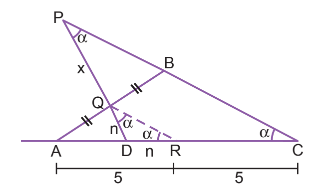
19.



En el △ABC:
$\alpha + 80° + \theta = 180°$
$\Rightarrow \alpha + \theta = 100°$
Del gráfico:
$\alpha + x + \theta = 180°$
$x = 180° - (\alpha + \theta) = 180° - 100°$
$\therefore\ x = 80°$

Clave C

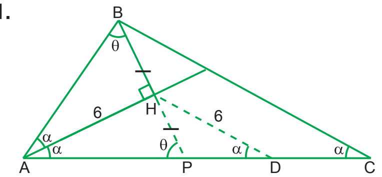
20.



Trazamos $\overline{QR}$ // $\overline{PC}$, entonces por el teorema de los puntos medios AR = RC = 5.
Prolongamos $\overline{PQ}$ hasta D, entonces el △QDR resulta isósceles.
En el △PDC isósceles, se cumple:
$x + n = n + 5$
$\therefore\ x = 5$

Clave E

21.

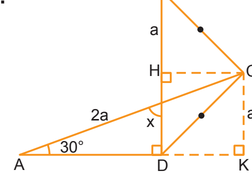


Prolongamos $\overline{BH}$ y trazamos $\overline{HD}$ // $\overline{BC}$.
Entonces $\overline{AH}$ será mediatriz de $\overline{BP}$.

Luego el △AHD es isósceles.
⇒ AH = HD = 6
En el △BPC por el teorema de los puntos medios:
$HD = \dfrac{BC}{2}$
⇒ BC = 2(HD) = 2(6)
$\therefore\ BC = 12$

Clave C

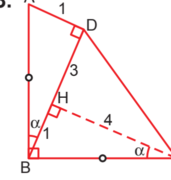
22.



Por dato: AC = BD
En el △BCD isósceles, trazamos $\overline{CH} \perp \overline{BD}$
⇒ BH = HD = CK = a
Además, AC = BD = 2a
En el ⊿ AKC: $CK = \dfrac{AC}{2} \Rightarrow m\angle CAK = 30°$
$\therefore x = 60°$

Clave C

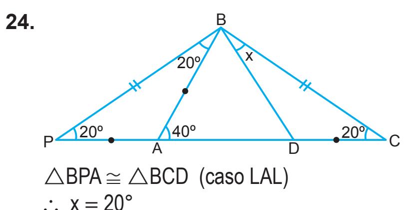
23.



Trazando $\overline{CH} \perp \overline{BD}$,
se observa que:
⊿ BDA ≅ ⊿CHB:
⇒ HC = 4
BH = 1 ⇒ DH = 3
El ⊿ DHC es notable de 37° y 53°:
⇒ DC = 5

Clave E

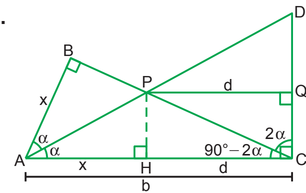
24.



△BPA ≅ △BCD (caso LAL)
$\therefore\ x = 20°$

Clave C

25.

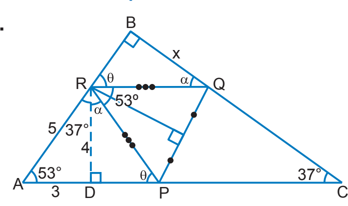


Por dato: b – d = 8
Del gráfico se deduce que la m∠PAC = 2α
Por el teorema de la bisectriz: AB = AH
Luego:
$x + d = b$
$\Rightarrow x = b - d = 8$
$\therefore\ x = 8$

Clave D

Resolución de problemas

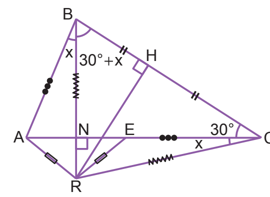
26.



Trazamos $\overline{RD} \perp \overline{AC}$
En el ⊿RBQ: α + θ = 90°
Entonces: ⊿RBQ ≅ ⊿PDR (caso ALA)
⇒ BQ = RD
∴ x = 4

Clave B

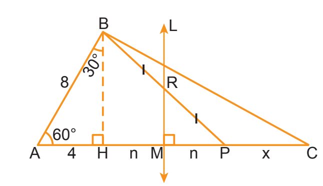
27.



Por dato:
$\overline{RH}$: mediatriz de $\overline{BC}$ ⇒ RB = RC
$\overline{RN}$: mediatriz de $\overline{AE}$ ⇒ AR = RE
Luego: △ABR ≅ △ECR (caso LLL)
⇒ m∠ABR = m∠ECR = x
Además: m∠ABC = 80° (dato)
$x + 30° + x = 80°$
$2x = 50°$
$\therefore\ x = 25°$

Clave B

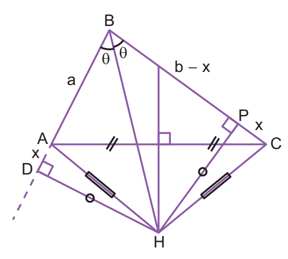
28.



En el ⊿BHP, por el teorema de los puntos medios: HM = MP = n
Por dato: $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.
⇒ AM = MC
$4 + n = n + x$
∴ x = 4

Clave C

29.



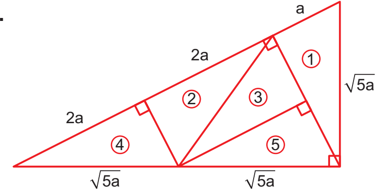
Dato:
BC – AB = 20
b – a = 20
Vemos que
△CPH ≅ ADH (caso LLA) ⇒ PC = DA = x
⇒ a + x = b – x
2x = b – a
2x = 20 ⇒ x = 10

Clave C

Nivel 3 (página 37) Unidad 1

Comunicación matemática

30.



31. Los triángulos ABC y AMC son isósceles:

$$\Rightarrow \begin{cases} 10 - 4 = 8 \\ 16 - 4 = 12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ reemplazando: $\boxed{12} + (8) = 20$

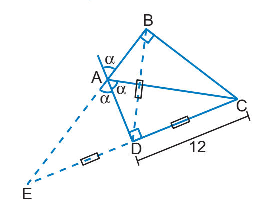
32. Los triángulos ABC y AQM son isósceles:

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 + 4 = 12 \\ 8 - 3 = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Reemplazando tenemos: $(12) - \boxed{8} = 4$

Razonamiento y demostración

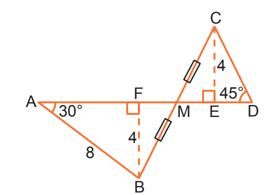
33.



Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ intersecándose en E.
En el $\triangle$EAC, $\overline{AD}$ es mediatriz y altura
$\Rightarrow$ ED = DC
En el $\triangle$ EBC, por propiedad:
ED = DC = BD
$\therefore$ BD = 12

Clave E

34.



Trazamos BF y CE, perpendiculares a AD.
Luego:

$\triangle$ AFB(30° y 60°) $\Rightarrow$ BF = $\frac{AB}{2}$

$\therefore$ BF = 4

$\triangle$ CEM $\cong$ $\triangle$ BFM $\Rightarrow$ CE = BF

$\therefore$ CE = 4

$\triangle$ CED(45° y 45°): CD = (CE)$\sqrt{2}$

$\therefore$ CD = $4\sqrt{2}$

Clave E

35.

Trazamos $\overline{RQ}$ teniendo en cuenta que $\overline{QM}$ es mediatriz de $\overline{RC}$.

$\Rightarrow$ m$\angle$QRC = x $\wedge$ m$\angle$RQP = 2x

RQ = QC = a

Trazamos $\overline{AR}$ formándose el $\triangle$ARQ en el cual $\overline{RP}$ es mediatriz de $\overline{AQ}$.

$\Rightarrow$ AR = RQ $\wedge$ m$\angle$RAP = 2x

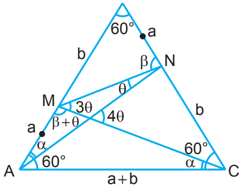
En el $\triangle$BAR isósceles:

3x = 75°

x = 25°

Clave D

36.



Se observa lo siguiente:

$\triangle$ABN $\cong$ $\triangle$CAM (caso LAL)

$\Rightarrow$ m$\angle$BAN = m$\angle$MCA = α

m$\angle$BNA = m$\angle$AMC = $\theta + \beta$

En el $\triangle$AMC:

$60° + \theta + \beta + \alpha = 180°$

$\theta + \beta + \alpha = 120°$

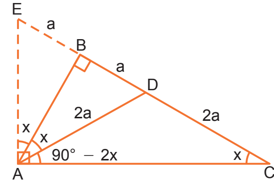
En el $\triangle$MAN:

$\underbrace{\theta + \beta + \alpha}_{120°} + 4\theta = 180°$

$\theta = 15°$

Clave B

37.



Por dato:

DC = 2BD $\Rightarrow$ DC = 2a

Construimos el $\triangle$EAD isósceles (AE = AD)

$\Rightarrow$ EB = BD = a

m$\angle$EAB = m$\angle$BAD = x

Se observa que en el $\triangle$ EAC, AD es mediana relativa a la hipotenusa.

$\Rightarrow$ ED = DC = AD = 2a

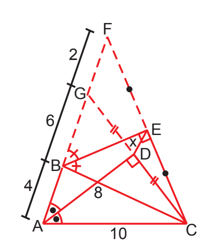
En el $\triangle$ ABD:

BD = $\frac{AD}{2}$ $\quad\therefore$ x = 30°

Clave D

Resolución de problemas

38.



Prologamos $\overline{CD}$ y $\overline{CE}$ intersecándose con la prolongación de $\overline{AB}$ en los puntos G y F, respectivamente.

En el $\triangle$GAC: GD = DC

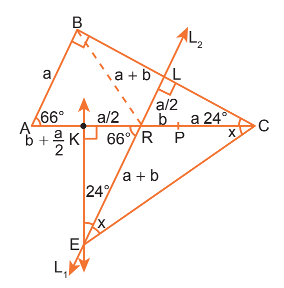
En el $\triangle$FBC: FE = EC

Por el teorema de los puntos medios en el $\triangle$FGC:

x = 1

Clave C

39.



Por dato: AB = PC = a

Además, $\overleftrightarrow{L_2}$ es mediatriz de BC.

$\Rightarrow$ RL = $\frac{a}{2}$ $\quad\wedge\quad$ AR = RC = BR

Sea: RP = b

$\Rightarrow$ BR = RC = AR = a + b

$\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{AP}$

AP = a + 2b $\Rightarrow$ AK = KP = b + $\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ KR = $\frac{a}{2}$

Se observa lo siguiente:

$\triangle$ EKR $\cong$ $\triangle$ CLR (caso ALA)

$\Rightarrow$ ER = RC = a + b

En el $\triangle$ERC isósceles:

x + x = 66°

x = 33°

Clave D

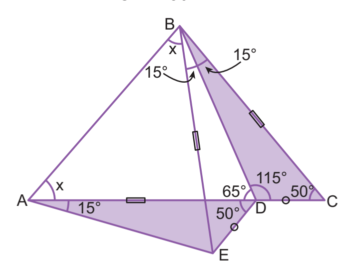
40. Construimos el triángulo externo AED, de manera que sea congruente con el triángulo BDC:

$\Rightarrow$ $\triangle$AED $\cong$ $\triangle$BDC

$\therefore$ $\overline{ED} \cong \overline{DC}$ y

$\angle$ DAE $\cong$ $\angle$DBC = 15°

$\angle$ ADE $\cong$ $\angle$BCD = 50°



Trazamos $\overline{BE}$ $\Rightarrow$ por ángulo externo

m$\angle$ BDA = 15° + 50° = 65°

$\Rightarrow$ m $\angle$ BDE = 115° = m$\angle$ BDC

$\therefore$ m $\angle$ BDE $\cong$ BDC (caso L A L)

$\Rightarrow$ m $\angle$ DBE =m $\angle$ EAD = 15° y $\overline{AE} \cong \overline{BD}$

$\therefore$ $\triangle$ABE $\cong$ ABD

$\Rightarrow$ m$\angle$ABE =m $\angle$ BAD = x

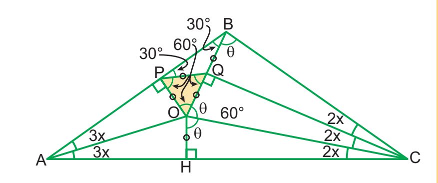
Luego en el triángulo ABC:

x + (x + 15 + 15) + 50 = 180 $\Rightarrow$ x = 50

Clave B

41. Trazamos $\overline{BO}$ para formar el triángulo isósceles BCO, luego trazamos la bisectríz $\overline{CQ}$, que también es mediatríz del segmento $\overline{BO}$, $\Rightarrow BQ = QO$.

También trazamos la altura OH; vemos que OH = OQ, pués $\overline{CO}$ es bisectríz del $\angle QCH$



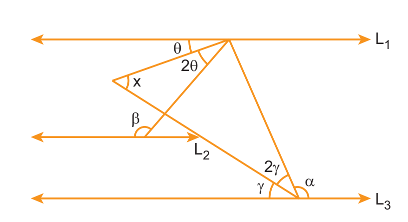
Luego trazamos la altura $\overline{OP}$.
Vemos también que OH = PO, pues $\overline{AO}$ es bisectríz de $\angle A$.
En el triángulo rectángulo OPB trazamos la mediana relativa a la hipotenusa PQ, que por definición mide la mitad de dicha hipotenusa $\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{BQ} \cong \overline{QO}$.
Ahora notamos que el $\triangle OPQ$ es un triángulo equilátero y el triángulo PQB es isósceles y además: $m\angle PBQ = 30°$

En el $\triangle ABC$:
$(3x+3x)+(30°+\theta)+(2x+2x+2x)=180°$ ...(1)
Y en el $\triangle BQC$: $\theta + 2x = 90°$ ...(2)
Reemplazando: $10x + 90° + 30° = 180° \Rightarrow x = 6°$

Clave B

MARATÓN MATEMÁTICA (página 39) Unidad 1

1.



De $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3}$:
$x = \theta + \gamma$ ... (I)

De $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$:
$\beta + 3\theta = 180°$ ... (II)

De $\overleftrightarrow{L_3}$:
$\alpha + 3\gamma = 180°$ ... (III)

Sumando (II) y (III):
$\beta + 3\theta = 180°$
$\alpha + 3\gamma = 180°$

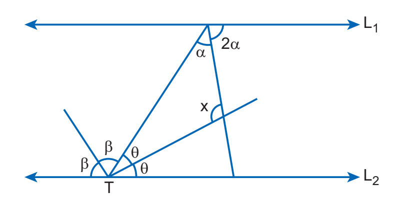
$\beta + \alpha + 3\theta + 3\gamma = 360°$
$\beta + \alpha + 3(\theta + \gamma) = 360°$ ... (IV)

De (IV) y (I):
$\beta + \alpha + 3x = 360° \Rightarrow \alpha + \beta = 360° - 3x$

De los datos:
$\alpha + \beta < 235° \Rightarrow 360° - 3x < 235°$
$41,6° < x$
$\therefore$ El menor valor entero de x es 42°.

Clave B

2.



Por propiedad:
$x = \theta + 2\alpha$ ... (I)

La suma de ángulos en una recta es 180°:
$\beta + \theta = 90°$ ... (II)

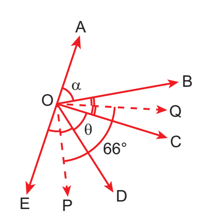
Sumamos (I) y (II):
$x = \theta + 2\alpha$
$\beta + \theta = 90°$

$x + \beta = 2\alpha + 90°$
$\Rightarrow x - 90° = 2\alpha - \beta$ ... (III)

Reemplazando los datos en (III):
$x - 90° = 2\alpha - \beta > 35°$
$\Rightarrow x - 90° > 35°$
$x > 125°$
$\therefore$ El menor valor entero de x es 126°.

Clave A

3.



De la gráfica:
$\overline{OQ}$: bisectriz del $\angle BOC$
$\overline{OP}$: bisectriz del $\angle DOE$
$m\angle AOB = \alpha$ y $m\angle COD = \theta$

Por dato: $m\angle BOE = m\angle AOB + m\angle COD$
$\Rightarrow m\angle BOE = \alpha + \theta$ ...(I)

La suma de los ángulos de una recta es 180°.
$\Rightarrow m\angle AOB + m\angle BOE = 180°$
$\alpha + \alpha + \theta = 180°$
$2\alpha + \theta = 180°$ ...(II)

De (I) se deduce:
$m\angle BOE = \alpha + \theta$
$m\angle BOC + m\angle COD + m\angle DOE = \alpha + \theta$
$m\angle BOC + \theta + m\angle DOE = \alpha + \theta$
$m\angle BOC + m\angle DOE = \alpha$
$\Rightarrow \frac{m\angle BOC}{2} + \frac{m\angle DOE}{2} = \frac{\alpha}{2}$ ...(III)

Por dato: $m\angle QOP = 66°$
$m\angle QOC + m\angle COD + m\angle DOP = 66°$
$m\angle QOC + \theta + m\angle DOP = 66°$
$m\angle QOC + m\angle DOP = 66° - \theta$ ...(IV)

De (III) y (IV):
$\frac{\alpha}{2} = 66° - \theta$

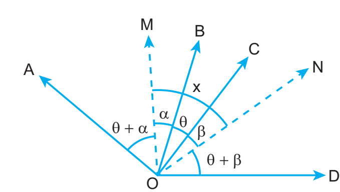
$\frac{\alpha}{2} + \theta = 66°$ ...(V)

De (II) y (V):
$2a + \theta = 180°$
$\frac{\alpha}{2} + \theta = 66°$ (–)

$\frac{3\alpha}{2} = 114°$
$\alpha = 76°$

Clave C

4.



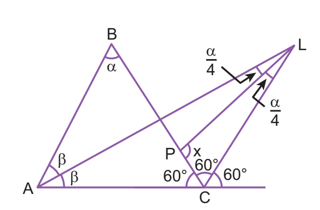
De la gráfica; $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{ON}$ son bisectrices de los ángulos AOC y BOD respectivamente.

De los datos:
$m\angle AOB + m\angle COD = 90°$
$\theta + 2\alpha + \theta + 2\beta = 90°$
$2\alpha + 2\theta + 2\beta = 90°$
$\Rightarrow \alpha + \theta + \beta = 45°$

Nos piden:
$x = \alpha + \theta + \beta$
$x = \alpha + \theta + \beta = 45°$

Clave C

5.



Por bisectriz interior y exterior:
$m\angle ALC = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow m\angle ALP = m\angle PLC = \frac{\alpha}{4}$

En el ΔALC por propiedad de ángulos internos:

$x = 90° + \frac{\beta}{2}$ ... (I)

De la gráfica:
$\alpha + 2\beta = 120°$ ... (II)

Por dato $\alpha < 79°$, en (II):
$\alpha < 79°$
$\alpha + 2\beta < 79° + 2\beta$
$120° < 89° + 2\beta \Rightarrow 10,25° < \frac{\beta}{2}$ ... (III)

De (III) y (I):
$10,25° < \frac{\beta}{2}$

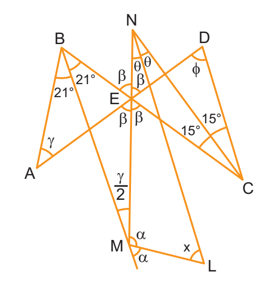
$100{,}25° < \frac{\beta}{2} + 90$

$100{,}25° < x$

$\therefore$ El menor valor entero de x es 101°.

Clave B

6.



Por propiedad de bisectriz interior y exterior:

$m\angle BME = \frac{m\angle BAE}{2} = \frac{\gamma}{2}$ ... (I)

$m\angle ENC = \frac{m\angle EDC}{2}$

$2\theta = \frac{\phi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\phi}{4}$ ... (II)

Por propiedad de la suma de ángulos de una recta en el punto M:

$\frac{\gamma}{2} + 2\alpha = 180°$ ... (III)

De la gráfica:

$\gamma + 42° = \phi + 30°$ ... (IV)

$x + \alpha + \theta = 180°$ ... (V)

De (II) y (III):

$\frac{\gamma}{2} + 2\alpha = 180° \Rightarrow \frac{\gamma}{4} + \alpha = 90°$

$\left.\begin{array}{r} \frac{\gamma}{4} + \alpha = 90° \\ \theta = \frac{\phi}{4} \end{array}\right\} (+)$

$\frac{\gamma}{4} + \alpha + \theta = 90° + \frac{\phi}{4}$

$\alpha + \theta = 90° + \left(\frac{\phi - \gamma}{4}\right)$ ... (VI)

De (VI) y (IV):

$\alpha + \theta = 90° + \left(\frac{12°}{4}\right)$

$\alpha + \theta = 93°$ ... (VII)

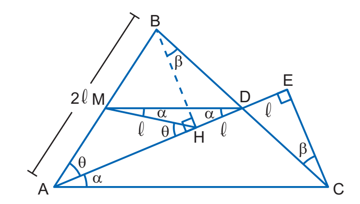
Luego, (VII) en (V):

$x + 93° = 180°$

$x = 87°$

Clave C

7.



Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AE} \Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle DEC$

En el $\triangle AHB$, M es punto medio de $\overline{AB}$.

$\Rightarrow AM = MB = MH = \ell$

En el $\triangle ABC$, D es punto medio de $\overline{BC}$.

$\Rightarrow \overline{MD} \parallel \overline{AC}$ y $m\angle MDA = m\angle CAD$

De los triángulos isósceles AMH y MHD:

$m\angle MHA = m\angle HAM = \theta$ y

$m\angle MDH = m\angle DMH = \alpha$

Luego, del $\triangle MDH$:

$2\alpha = \theta$ $\therefore \frac{\alpha}{\theta} = \frac{1}{2}$

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 42) Unidad 2

1. Sean los ángulos del pentágono:
$\alpha; \alpha + r; \alpha + 2r; \alpha + 3r; \alpha + 4r$

Por dato:
$\alpha + 4r - \alpha = 120°$
$4r = 120° \Rightarrow r = 30°$

Luego:
$S_{m\angle i} = 180°(n - 2);$
Para: $n = 5$
$S_{m\angle i} = 180°(3) = 540°$
$5\alpha + 10r = 540°$
$5\alpha + 10(30°) = 540°$
$5\alpha = 240°$
$\therefore \alpha = 48°$

Clave C

2. Sabemos:
$N_{DV} = nv - \dfrac{(v+1)(v+2)}{2}$

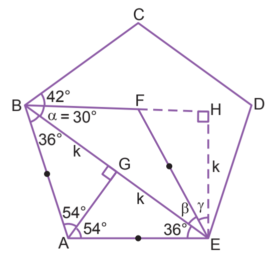
Del enunciado:
$(n - 3) = n(n - 9) - \dfrac{(n-9+1)(n-9+2)}{2}$

Luego:
$\dfrac{(n-8)(n-7)}{2} = n^2 - 9n - n + 3$
$n^2 - 15n + 56 = 2(n^2 - 10n + 3)$
$n^2 - 15n + 56 = 2n^2 - 20n + 6$
$50 = n^2 - 5n$
$10(10 - 5) = n(n - 5) \Rightarrow n = 10$

Piden:
$m\angle e = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{360°}{10}$
$\therefore m\angle e = 36°$

Clave D

3.



Del pentágono ABCDE:
$42° + \alpha + 36° = m\angle i = \dfrac{180°(5-2)}{5}$
$\Rightarrow \alpha + 78° = 108° \Rightarrow \alpha = 30°$

Del gráfico:
$\triangle EGA \cong \triangle EHF$ (caso L L A)
$\Rightarrow m\angle GEA = m\angle HEF = 36°$
$\Rightarrow \gamma = 36°$

Como: $\beta + \gamma = 60°$
$\beta + 36° = 60° \Rightarrow \beta = 24°$

Piden: $m\angle AEF = \theta$
$\Rightarrow \theta = 36° + \beta = 36° + 24°$
$\therefore \theta = 60°$

Clave E

4. Sea n el número de lados del polígono.
Por dato: $(2p) = N_D$
$6n = \dfrac{n(n-3)}{2}$
$n = 15$

Piden: $m\angle e = \dfrac{360°}{15} = 24°$

Clave C

5. Polígono 1
n.° de lados: n

Polígono 2
n.° de lados: x

Por dato:
$N_{D1} - N_{D2} = 19$
$\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{x(x-3)}{2} = 19$
$n(n - 3) - x(x - 3) = 38 \quad ...(1)$

Además:
$\dfrac{m\angle e_1}{m\angle e_2} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{\frac{360°}{n}}{\frac{360°}{x}} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \dfrac{x}{n} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x = 5k \\ n = 6k \end{matrix}$

En (1):
$6k(6k - 3) - 5k(5k - 3) = 38$
$11k^2 - 3k - 38 = 0$
$11k \quad 19$
$k \quad -2 \Rightarrow k = 2$

Piden: $6k - 5k = k = 2$

Clave D

6. Dato:
$m\angle i_N - m\angle i_{N-1} = 12$

$\dfrac{180°(N-2)}{N} - \dfrac{180°(N-3)}{N-1} = 12$

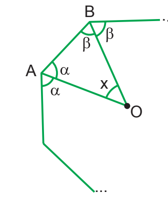
$\dfrac{15(N-2)}{N} - \dfrac{15(N-3)}{N-1} = 1$

$15(N - 2)(N - 1) - 15N(N - 3) = N(N - 1)$
$15(N^2 - 3N + 2) - 15N^2 + 45N = N^2 - N$
$15N^2 - 45N + 30 - 15N^2 + 45N = N^2 - N$

$0 = N^2 - N - 30$
$N \quad -6$
$N \quad 5 \Rightarrow N = 6$

Clave D

7.

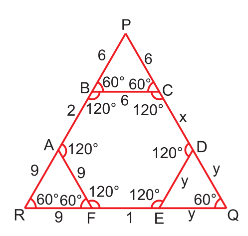


$S_{m\angle i} = 180°(32 - 2)$
$2\alpha + 2\beta + S_{m\angle i30} = 5400°$
$2(\alpha + \beta) + 5212° = 5400°$
$2(\alpha + \beta) = 188°$
$\alpha + \beta = 94°$

En el $\triangle ABO$:
$\underbrace{\alpha + \beta} + x = 180°$
$94° + x = 180°$
$x = 86°$

Clave D

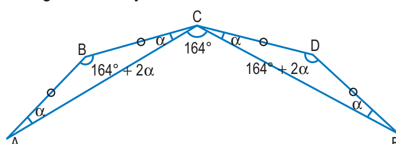
8. Piden: $CD = x$; $DE = y$



Del triángulo equilátero RPQ:
$6 + 2 + 9 = 9 + 1 + y$
$\Rightarrow y = 7$
También:
$6 + x + y = 9 + 1 + y$
$6 + x = 10$
$\therefore x = 4$

Clave B

9. Como el polígono es regular, entonces los triángulos ABC y CDE son isósceles:



En el triángulo ABC:
$\alpha + 164° + 2\alpha + \alpha = 180° \Rightarrow a = 4°$
$m\angle i = 164° + 2(4°) = \dfrac{180°(n-2)}{n}$
$\therefore 172n = 180n - 360$
$\Rightarrow n = 45$ lados

Clave D

10. Tenemos los n ángulos de dicho polígono:
$\alpha - \dfrac{3(n-1)}{2}, ..., \alpha - 6, \alpha - 3, \alpha, \alpha + 3, \alpha + 6, ...,$
$\alpha + \dfrac{3(n-1)}{2}$

Sumamos los n ángulos: $S_{m\angle i} = 180°(n-2)$
$\alpha + \frac{3}{2}(n-1), ... + \alpha + 6 + a - 3 + \alpha + \alpha + 3 + \alpha$
$+ 6 + ... + \alpha + \frac{3}{2}(n-1) = 180°(n-2)$

$n(\alpha) = 180°(n - 2) \quad ...(I)$

Pero el menor mide: $\alpha - \frac{3}{2}(n-1) = 135°$
$\alpha = 135° + \frac{3}{2}(n-1)$



Reemplazamos en (I):

$n\left(135° + \frac{3}{2}(n-1)\right) = 180°(n-2)$

$135n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = 180n - 360$

$360 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n = 45n$

$720 + 3n^2 - 3n = 90n$

Simplificando: $n^2 - 31n + 240 = 0$

$n \quad -16$

$n \quad -15$

$\Rightarrow \quad (n-16)(n-15) = 0$

$n = \{16; 15\}$

Cumplen con la condición el pentadecágono y el hexadecágono.

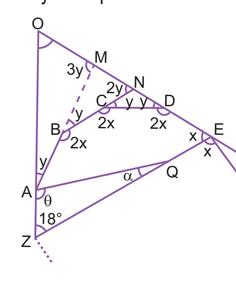
Clave E

11. Sea n el número de lados del polígono regular, trazamos las prolongaciones de $\overline{ZA}$ y $\overline{ED}$ formando el triángulo ZEO.

Trazamos las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ que intersectan a $\overline{OE}$ en M y N respectivamente:

$2x + y = 180°$

$y = 180° - 2x$



En el △AZQ:

$\theta + \alpha + m\angle AZQ = 180°$

Por dato: $\theta + \alpha = 162° \Rightarrow m\angle AZQ = 18°$

En el △OZE: $18° + x = 4y$

$18° + x = 4(180° - 2x)$

$x = 78°$

$m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n}$

$2(78°) = \frac{180°(n-2)}{n}$

$n = 15$

Clave E

12. Vemos que al trazar las mediatrices OM y ON se forma en polígono convexo MBCDENO de 7 lados, entonces:

$90° + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + 90° + 160° = Sm\angle i$

$180° + 4\alpha + 160° = 180°(7-2)$

$45° + \alpha + 40° = 45°(5) \Rightarrow \alpha = 140°$

Sea n el número de lados del polígono regular:

$\therefore \ m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 140° = \frac{180°(n-2)}{n}$

$14n = 18n - 36$

$\Rightarrow n = 9$

$D_T = \frac{n}{2}(n-3)$

Reemplazamos: $D_T = \frac{9}{2}(9-3) \Rightarrow D_T = 27$

Clave B

13. Sea n el número de lados del primer polígono:

$D_{5(n)} - 15 = D_{4(n-2)}$

$n(5) - \frac{1}{2}(5+1)(5+2) - 15 = (n-2)4 - \frac{1}{2}(4+2)(4+1)$

$5n - 3(7) - 15 = 4n - 8 - 3(5)$

$\Rightarrow n = 13$ lados

Clave D

14. Planteamos $D_{(n-10)} = 3n + 9$

$(n-10)n - \frac{1}{2}(n-10)(n-10+2) = 3n + 9$

Simplificando:

$n^2 - 9n - 90 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n-15)(n+6) = 0$

$n = \{15; -6\}$

$\Rightarrow$ El polígono posee 15 lados

n.° ángulos rectos $= \frac{180°(n-2)}{90°}$

n.° de ángulos rectos $= 2(15-3)$

n.° ángulos rectos $= 26$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 44) Unidad 2

Comunicación matemática

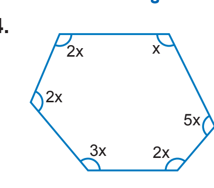
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



$S_{m\angle i} = 180°(n-2)$

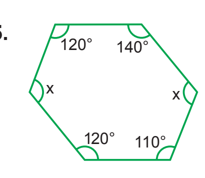
$15x = 180°(6-2)$

$15x = 720°$

$x = 48°$

Clave B

5.



$S_{m\angle i} = 180°(n-2)$

$2x + 490° = 180°(6-2)$

$2x + 490° = 720°$

$2x = 230°$

$x = 115°$

Clave A

6.

$S_{m\angle i} = 180°(n-2)$

$4\theta + 640° = 180°(8-2)$

$4\theta + 640° = 1080°$

$4\theta = 440°$

$\theta = 110°$

Clave C

7. $8x = 360°$

$x = 45°$

$S_{m\angle i} = 180°(n-2)$

$8x = 360° \Rightarrow x = 45°$

Clave D

8. Como el polígono es un pentágono regular $\overline{CM}$ sería la mediatriz de $\overline{AE}$.

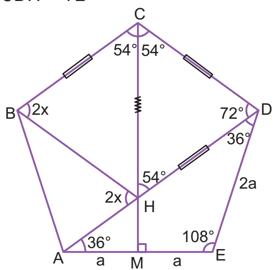
1.° $m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n}$

$m\angle i = \frac{180°(5-2)}{5} \Rightarrow m\angle i = 108°$

El △ADE es isósceles:

$\Rightarrow m\angle DAE = m\angle ADE = 36°$

2.° $m\angle CDH = 72°$



$\overline{CM}$ es mediariz de $\overline{AE}$ y bisectríz de ∠BCD.

$\therefore \ m\angle BCH = m\angle HCD = 54°; \Rightarrow m\angle CHD = 54°$

Luego: como $m\angle BCH = m\angle CHD = 54°$

$\Rightarrow \quad \overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\therefore \ \angle AHB \cong \angle HBC \quad \Rightarrow m\angle HBC = 2x$

3.° El ΔBCM ≅ ΔDCH (caso LAL)

$\Rightarrow m\angle CBH = m\angle CDH$

$2x = 72° \Rightarrow x = 36°$

Clave D

Resolución de problemas

9. Sean los ángulos: α, β y θ

$\alpha + \beta + \theta + 500° = 180°(7-2)$

$\alpha + \beta + \theta + 500° = 900°$

$\alpha + \beta + \theta = 400°$

Clave A

10. Sea n número de lados del polígono convexo.

Del enunciado:

$4(180°(n-2)) = 180°(2n-2)$

$4n - 8 = 2n - 2$

$2n = 6 \qquad \therefore \ n = 3$

Clave B

11. Sea n el número de lados del polígono.

Del enunciado:

$$\frac{\frac{180°(n-2)}{n}}{\frac{360°}{n}} = \frac{5}{1}$$

$n - 2 = 10$

$n = 12$

Luego:

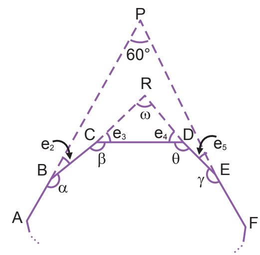
$N_D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2}$

$N_D = \frac{12(9)}{2}$

$N_D = 54$

Clave B

12.



Entonces:

$e_2 + 60° + e_5 = \omega$

$\omega + e_3 + e_4 = 180°$

$\Rightarrow e_2 + e_3 + e_4 + e_5 = 120°$

Luego:

$\alpha + e_2 = 180°$

$\beta + e_3 = 180°$

$\theta + e_4 = 180°$

$\gamma + e_5 = 180°$

Sumamos las expresiones:

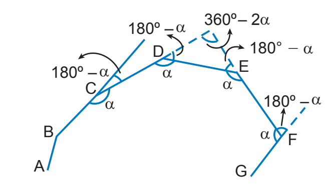
$\alpha + \beta + \theta + \gamma + (e_2 + e_3 + e_4 + e_5) = 720°$

$\alpha + \beta + \theta + \gamma + 120° = 720°$

$\therefore\ \alpha + \beta + \theta + \gamma = 600°$

Clave E

13.



$(180° - \alpha) + (180° - \alpha) + (360° - 2\alpha) = 180°$

$4\alpha = 540°$

$\alpha = 135°$

Por m ∠ i:

$\dfrac{180°(n-2)}{n} = 135°$

$4n - 8 = 3n$

$n = 8$

$S_{m\angle i} = 180°(n - 2)$

$S_{m\angle i} = 180°(6) = 1080°$

La cantidad de ángulos llanos será:

n.° de ∠ llanos $= \dfrac{1080°}{180°} = 6$

Clave B

14. $\dfrac{360°}{n} + \dfrac{360°}{n} + \dfrac{180°(n-2)}{n} = 210°$

$720° + 180°n - 360° = 210°n$

$360° = 30°n$

$n = 12$

Entonces:

$N_D = \dfrac{12(12-3)}{2} = \dfrac{12(9)}{2}$

$\therefore\ N_D = 54$

Clave C

15. Sea n el número de lados del polígono.

Del enunciado:

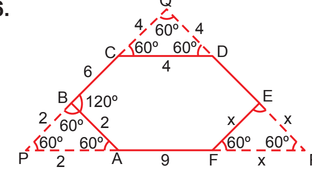
$\dfrac{n(n-3)}{2} + 2n = 6$

$n^2 - 3n + 4n = 12$

$n(n + 1) = 12 = 3(4) \qquad \therefore\ n = 3$

Clave D

16.



El △ PQR es equilátero

$2 + 6 + 4 = 2 + 9 + x$

$\therefore\ x = EF = 1$

Clave C

Nivel 2 (página 45) Unidad 2

Comunicación matemática

17. Sea n número de lados del polígono.

Del enunciado:

$3(180° (n - 2)) = 180°(2n - 2)$

$3n - 6 = 2n - 2$

$n = 4$

Por lo tanto, el polígono es un cuadrilátero.

Clave A

18.

19.

20.

Razonamiento y demostración

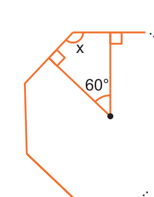
21. $m\angle i = \dfrac{180°(8-2)}{8} = m\angle i = 135°$

$180° - x + 3(135°) + 180° = 720°$

$x = 45°$

Clave A

22.



$x + 90° + 90° + 60° = 180°(4 - 2)$

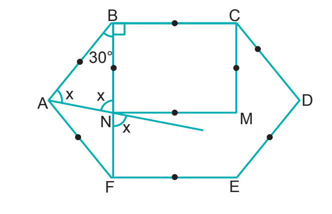
$x = 120°$

$\Rightarrow m\angle i = \dfrac{180°(n-2)}{n} = 120°$

$\therefore\ n = 6$

Clave E

23.



$m\angle i = \dfrac{180°(6-2)}{6} = 30°(4) = 120°$

En el △ ABN:

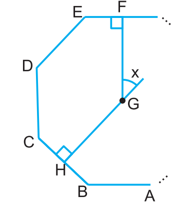
$30° + 2x = 180°$

$2x = 150°$

$x = 75°$

Clave C

24. $m\angle i = \dfrac{180°(12-2)}{12} = 150°$



El polígono HCDEFG es un hexágono:

$\Rightarrow S_{m\angle i} = 720°$

$3(150°) + 90° + 90° + 180° - x = 720°$

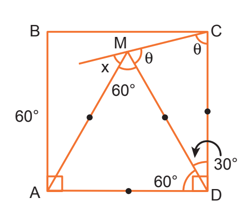
$450° + 180° + 180° - x = 720°$

$x = 810° - 720°$

$x = 90°$

Clave A

25. Piden: x



El polígono MCD tiene 3 lados.

$\Rightarrow\ 2\theta + 30° = 180°(3 - 2)$

$\Rightarrow\ \theta = 75° \qquad ...(1)$

Además:

$x + \theta + 60° = 180° \qquad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

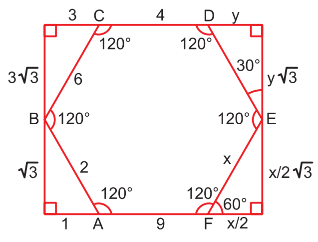
$x + 75° + 60° = 180°$

$x + 135° = 180° \Rightarrow x = 45°$

Clave B

Resolución de problemas

26.



Hexágono equiángulo: $m\angle i = 120°$

Igualando segmentos:

$7 + y = 10 + \dfrac{x}{2} \qquad ...(1)$

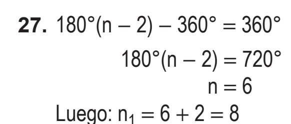
$4\sqrt{3} = y\sqrt{3} + \dfrac{x}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow 4 = y + \dfrac{x}{2} \qquad ...(2)$

Sumamos (1) y (2) $\Rightarrow 11 = 10 + x$

$1 = x$

Clave C



27. $180°(n-2) - 360° = 360°$

$180°(n-2) = 720°$

$n = 6$

Luego: $n_1 = 6 + 2 = 8$

Suma de diagonales de ambos polígonos:

$\dfrac{6(6-3)}{2} + \dfrac{8(8-3)}{2} = 29$

Clave E

28. $D_T - \dfrac{S_{m\angle i}}{180°} = 119$

$\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{(n-2)180°}{180°} = 119(2)$

$n^2 - 3n - 2n + 4 = 119 \, . \, 2$

$n^2 - 5n - (18)(13) = 0$

n ╳ − 18
n   13

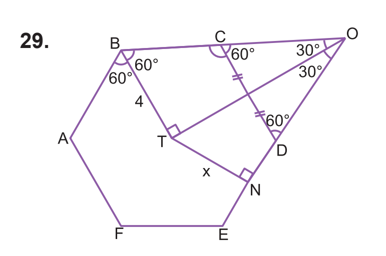
$(n-18)(n+13) = 0$

$\Rightarrow n = 18$

Nos piden: $D_T = \dfrac{18(15)}{2} = 9(15) = 135$

Clave A

29.

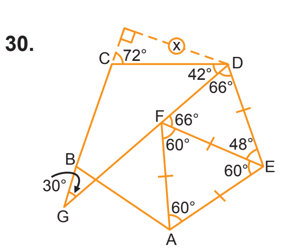


En ◺ BTO ⇒ $TO = 4\sqrt{3}$

En ◺ TNO ⇒ $TN = \dfrac{TO}{2} = 2\sqrt{3}$

Clave C

30.



$m\angle i = \dfrac{180° \times 3}{5} = 108°$

Por dato:

$GD = 10$

$\text{sen}30° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{10}$

$\therefore \ x = 5$

Clave C

31. $D_{T1} - D_{T2} = 11$

$\dfrac{n_1(n_1-3)}{2} - \dfrac{n_2(n_2-3)}{2} = 11$ ...(α)

$\dfrac{\frac{360°}{n_1}}{\frac{360°}{n_2}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{3k}{4k}$ ...(β)

De (α) ∧ (β):

$7k^2 - 3k - 22 = 0$

7k ╳ 11
k   − 2

$(7k + 11)(k - 2) = 0 \Rightarrow k = 2$

En (β): $n_2 = 6$

$n_1 = 8$

$n_1 + n_2 = 14$

Clave B

Nivel 3 (página 47) Unidad 2

Comunicación matemática

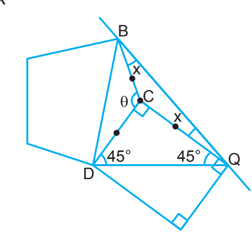
32.

33.

34.

Razonamiento y demostración

35. Piden: x



En el pentágono:

$\theta = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

$\theta = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$

En el cuadrilátero BCDQ:

$\theta = 45° + (45° + x) + x$

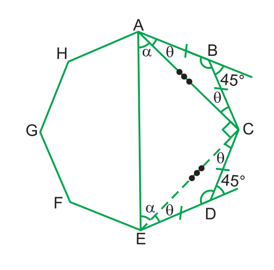
$108° = 90° + 2x$

$18° = 2x$

$x = 9°$

Clave C

36.



Por dato, el octógono es regular.

$m\angle e = \dfrac{360°}{8} = 45° \Rightarrow m\angle i = 135°$

Luego: △ABC ≅ △CDE (caso L A L)

⇒ AC = CE, además: $2\theta = 45°$

Como: $m\angle C = m\angle i$

$\theta + m\angle ACE + \theta = 135°$

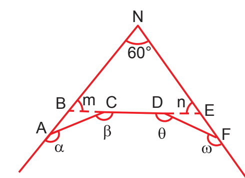
$m\angle ACE + 45° = 135° \Rightarrow m\angle ACE = 90°$

Entonces el triángulo ACE resulta rectángulo y notable de 45°.

$\therefore \alpha = 45°$

Clave C

37.



En el △ABC: $S_{m\angle e} = 360°$

$\Rightarrow \alpha + \beta + m = 360°$ ...(1)

En el △DEF: $S_{m\angle e} = 360°$

$\Rightarrow \theta + \omega + n = 360°$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$\alpha + \beta + \theta + \omega + m + n = 720°$ ...(3)

En el △BNE:

$60° + m + n = 180°$

$\Rightarrow m + n = 120°$ ...(4)

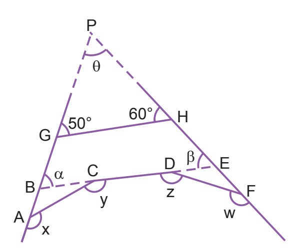
Reemplazando (4) en (3):

$\alpha + \beta + \theta + \omega + (120°) = 720°$

$\therefore \ \alpha + \beta + \theta + \omega = 600°$

Clave D

38.



En el △GPH:

$50° + 60° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 70°$

En el △BPE:

$\alpha + \beta + \theta = 180°$

$\alpha + \beta + 70° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 110°$ ...(1)

En el △ABC: $S_{m\angle e} = 360°$

$\Rightarrow x + y + \alpha = 360°$ ...(2)

En el △DEF: $S_{m\angle e} = 360°$

$\Rightarrow z + w + \beta = 360°$ ...(3)

Sumando (2) y (3):

$x + y + z + w + \alpha + \beta = 720°$ ...(4)

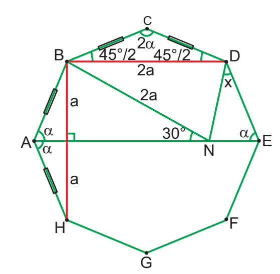
Reemplazando (1) en (4):

$x + y + z + w + (110°) = 720°$

$\therefore \ x + y + z + w = 610°$

Clave D

39. Trazamos las diagonales BD y BM; como el polígono es regular se sabe que $\triangle ABH \cong \triangle CDB$



$\Rightarrow$ BH = BD = 2a
$\therefore$ $\triangle$BDN es isósceles.
$m\angle BDN = m\angle BND$

De la figura: $2\alpha = m\angle i$

$m\angle i = \dfrac{180°(8-2)}{8}$

$m\angle i = 135° = 2\alpha$

En el triángulo isósceles BCD:

$2m\angle CDB = 180° - 135°$

$m\angle CDB = 45/2°$

Por ángulo externo del triángulo NDE sabemos que $\alpha + x = m\angle DNB + 30°$; pero $\alpha = 135/2°$, reemplazando tendremos:

$m\angle DNB = x + 135/2° - 30°$ ...(I)

$m\angle CDE = 2\alpha = 135°$

$45/2° + m\angle BDN + x = 135°$

$\Rightarrow m\angle BDN = 135° - x - 45/2°$ ...(II)

Como $\triangle$BDN es isósceles igualamos (I) en (II):

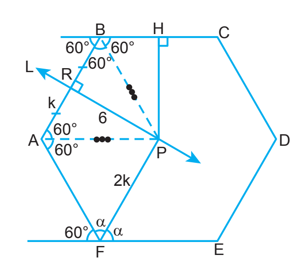
$\therefore x + \dfrac{135°}{2} - 30° = 135° - x - \dfrac{45°}{2}$;

$\Rightarrow x = 37°\ 30'$

Clave C

Resolución de problemas

40.



Por dato: el hexágono es equiángulo:

$m\angle e = \dfrac{360°}{6} = 60° \Rightarrow m\angle i = 120°$

Además: PR = PH = 6

Luego: ⊿PRB ≅ ⊿PHB (caso L L A)

$\Rightarrow m\angle HBP = m\angle PBR = 60°$

En el ⊿PRA, notable de 30° y 60°:

$k\sqrt{3} = 6 \Rightarrow k = 2\sqrt{3}$

Del gráfico: $m\angle i = 2\alpha$
$120° = 2\alpha$
$\Rightarrow \alpha = 60°$

Entonces el $\triangle$APF resulta equilátero:

$PF = PA = 2k = 2(2\sqrt{3})$

$\therefore PF = 4\sqrt{3}$

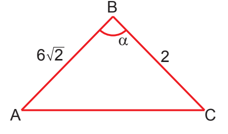
Clave E

41. $S_{m\angle i} = 3(S_{m\angle e})$

$180°(n-2) = 3(360°)$

$n - 2 = 6$

$n = 8$



$m\angle i = \alpha = \dfrac{180°(6)}{8}$

$\alpha = 135°$

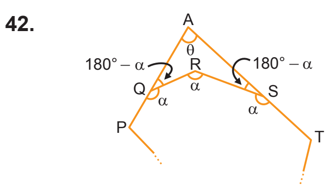
$AC^2 = (6\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2(6\sqrt{2})(2)(\cos 135°)$

Siendo: $\cos 135° = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AC = 10$

Clave B

42.



θ es agudo $\Rightarrow \theta < 90°$ ...(1)

$\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$ ...(2)

En el polígono ASRQ:

$\theta + 180° - \alpha + 180° - \alpha = \alpha$

$\Rightarrow \theta = 3\alpha - 360°$ ...(3)

Reemplazando (2) en (3):

$\theta = 3 \cdot \left[\dfrac{180°(n-2)}{n}\right] - 360°$

Reemplazando este valor en (1):

$540°\left[\dfrac{(n-2)}{n}\right] - 360° < 90°$

$540°(n-2) < 450°n$

$6(n-2) < 5n$

$n < 12$

Por lo tanto; el máximo número de lados del polígono es 11.

Clave B

43. Sea n número de lados del polígono:

$\dfrac{360°}{n} - 5° = \dfrac{360°}{m}$; $m > n$

$\dfrac{m(m-3)}{2} = \dfrac{n(n-3)}{2} + 7$

$m(m-3) - n(n-3) = 14$

$m^2 - 3m - n^2 + 3n = 14$

$(m-n)(m+n) - 3(m-n) = 14$

$\underbrace{(m-n)}_{1}\underbrace{(m+n-3)}_{14} = 14$

$\left.\begin{array}{l} m - n = 1 \\ m + n = 17 \end{array}\right\} m = 9 \wedge n = 8$

$\dfrac{360°}{n} - 5° = \dfrac{360°}{m}$

$\dfrac{360°}{n} - \dfrac{360°}{m} = 5°$

$\dfrac{360°}{8} - \dfrac{360°}{9} = 5°$

$45° - 40° = 5°$; sí cumple.

El polígono original tiene 8 lados.

Clave C

44. Sea n el número de lados del polígono.

Del enunciado:

$\dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{160}{n}$

$n^2(n-3) = 160(2) = 8^2(8-3)$

$n^2(n-3) = 8^2(8-3)$

$\therefore n = 8$

Clave E

45. $D_{T(n)} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

$D_{T(n-1)} = \dfrac{(n-1)(n-4)}{2}$

Se cumple:

$\dfrac{n(n-3)}{2} - 14 = \dfrac{(n-1)(n-4)}{2}$

$n^2 - 3n - 28 = n^2 - 5n + 4$

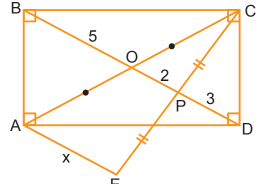
$2n = 32$

$n = 16$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 49) Unidad 2

1.



Trazamos $\overline{AC}$, diagonal del rectángulo.

$\Rightarrow AO = OC \quad \wedge \quad BO = OD$

En el $\triangle ACE$ por el teorema de los puntos medios:

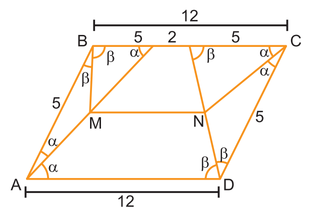
$OP = \dfrac{AE}{2}$

$2 = \dfrac{x}{2}$

$\therefore\ x = 4$

Clave C

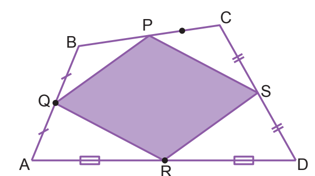
2. Piden: MN



$MN = \dfrac{12 + 2}{2} = 7$

Clave A

3.



Piden: $2p_{\Diamond PQRS}$

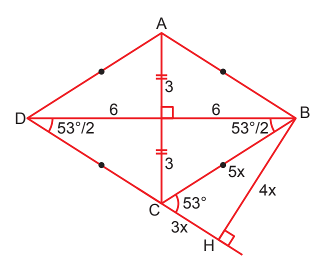
Del teorema de Varignon:

$2p_{\Diamond PQRS} = AC + BD$

$2p_{\Diamond PQRS} = 12 + 8 = 20$

Clave C

4.



$BH = 4x$

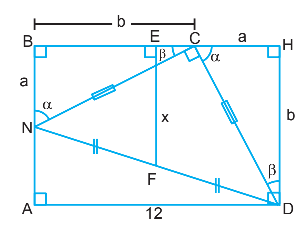
Pero: $(5x)^2 = 3^2 + 6^2$

$25x^2 = 45$

$x = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \therefore\ BH = \dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

Clave C

5.



Prolongamos $\overline{BC}$ y trazamos $\overline{DH} \parallel \overline{EF}$

Además: $(\overline{DH} \perp \overline{EH})$

En el gráfico:

$⊿NBC \cong ⊿CHD$ (caso A-L-A)

$\Rightarrow NB = CH = a \wedge BC = DH = b$

Luego: $AD = BH = 12$

$\Rightarrow a + b = 12$

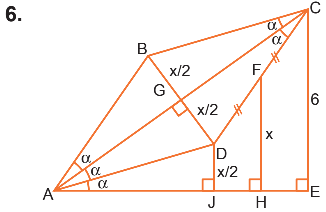
En el trapecio DNBH:

$x = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{12}{2}$

$\therefore\ x = 6$

Clave C

6.



Por dato: ABCD es un rombo:

Trazamos la diagonal $\overline{AC}$.

$\Rightarrow AC \perp BD \quad \wedge \quad BG = GD = \dfrac{x}{2}$

Por el teorema de la bisectriz:

$GD = DJ = \dfrac{x}{2}$

En el trapecio JDCE:

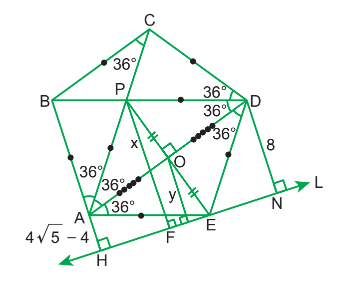
$x = \dfrac{\frac{x}{2} + 6}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{x}{2} + 6$

$\dfrac{3x}{2} = 6$

$\therefore x = 4$

Clave B

7.



Como ABCDE es un polígono regular:

$m\angle i = \dfrac{180°(5-2)}{5} = 108°$

Luego, se deduce que APDE es un rombo.

$\Rightarrow AO = OD \ \wedge \ PO = OE$

En el trapecio HADN:

$y = \dfrac{4\sqrt{5} - 4 + 8}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{5} + 2$

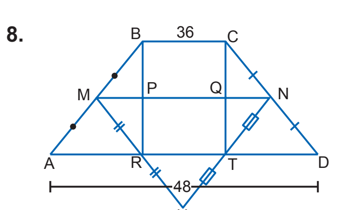
En el ⊿PFE por base media:

$x = 2y = 2\sqrt{5} + 2$

$\therefore x = 4\sqrt{5} + 4$

Clave D

8.



Propiedad de la mediana:

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{36 + 48}{2} = 42$

Luego:

En el $\triangle MHN$:

$\overline{RT}$ es base media:

$RT = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$

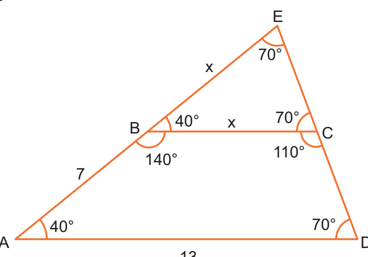
Luego, en el trapecio BCTR:

$PQ = \dfrac{BC + RT}{2} = \dfrac{36 + 21}{2} = \dfrac{57}{2}$

$\therefore PQ = 28{,}5$

Clave E

9. Prolongamos los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se intersecan en un punto E. Luego, $m\angle EBC = 40°$ y $m\angle ECB = 70°$.



$40° + 70° + m\angle BEC = 180°$

$m\angle BEC = 70° \Rightarrow \Delta BEC$ es isósceles

$\Rightarrow$ BE = BC = x; pero $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$:

$m\angle BAD = 40°$ y $m\angle EDA = 70°$

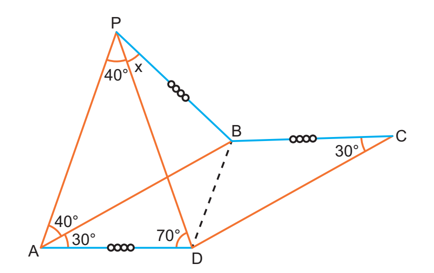
$\Rightarrow$ $\triangle AED$ es isósceles.

$\therefore$ AE = AD, reemplazando:

$7 + x = 13 \Rightarrow x = 6$

Clave C

10. Como $\overline{AB} \parallel \overline{DC} \Rightarrow m\angle BAD = m\angle BCD = 30°$; pero el $\triangle APD$ es un triángulo isósceles, por lo tanto: $m\angle PAD = 70° = m\angle PAB + m\angle BAD$



Reemplazando:

$70° = m\angle PAB + 30 \Rightarrow m\angle PAB = 40°$

Luego si $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow DC = AB = AP$

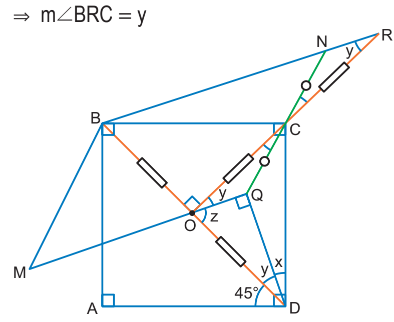
1.° $\triangle APD \cong \triangle PAB$ (caso L-A-L) $\Rightarrow PB = AD$

2.° $\triangle PBD \cong \triangle ADB$ (caso L-L-L) $\Rightarrow x = 30°$

Clave B

11. Trazamos la diagonal BD; en el ⊿QOD:
$z + y = 90°$

Trazamos $\overline{OR}$ que pasa por el vértice C e interseca a la prolongación de $\overline{BN}$ en el punto R; como OR = BD $\Rightarrow$ $m\angle COQ = y$, pero $\overline{MQ} \parallel \overline{BR}$
$\Rightarrow m\angle BRC = y$



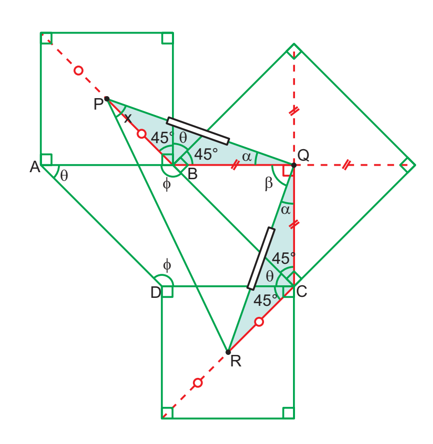
El $\triangle RNC \cong \triangle OQC$ (caso ALA)
$\Rightarrow RC = OC$

$\therefore$ El $\triangle BOR$ es notable de $\dfrac{53°}{2}$:
$\Rightarrow y = 26°30'$

Pero sabemos del $\triangle COD$: que $x + y = 45°$
$\Rightarrow x = 18°30'$

Clave A

12. Trazamos $\overline{PB}$, $\overline{QB}$, $\overline{QC}$ y $\overline{RC}$; los cuales son semidiagonales de los cuadrados.



Como ABCD es un paralelogramo vemos que: AB = DC

$\Rightarrow$ PB = RC y QB = QC pues son semidiagonales del mismo cuadrado.

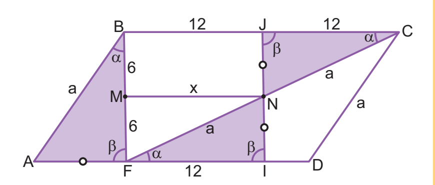
Luego: $\angle PBQ \cong \angle QCR$ (pues $\theta + \phi = 180°$)
El $\Delta PBQ \cong \Delta RCQ$ (caso LAL):
$\Rightarrow PQ = QR$ y $m\angle PQB = m\angle RQC = \alpha$

En el ⊿BQC: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow m\angle PQR = 90°$

$\therefore$ El ⊿PQR es notable de 45° $\Rightarrow x = 45°$

Clave D

13. Ubicamos un punto I en $\overline{FD}$ de modo que FI = BF = 12, luego trazamos $\overline{IN}$ y prolongamos dicho segmento hasta J ($J \in BC$)



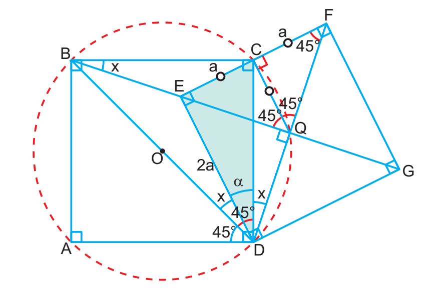
Como N es punto medio de $\overline{FC}$ y $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$
$\Rightarrow$ IN = NJ
Luego $\triangle AFB \cong \triangle NIF$ (caso LAL)
$\Rightarrow \angle AFB \cong \angle FIJ$ $\therefore$ $\overline{BF} \parallel \overline{JI}$ por lo que BJIF sería un paralelogramo, además $\overline{MN} \parallel \overline{BJ} \parallel \overline{FI}$ pues es base media de BJIF
$\therefore$ BJ = FI = MN
$\Rightarrow x = 12$

Clave D

14. Trazamos las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$, luego ubicamos el centro del cuadrado DEFG y lo llamamos $\{Q\} = \overline{FD} \cap \overline{EG}$, para después trazar $\overline{CQ}$; como $m\angle BCD = m\angle EQD = 90°$

$\Rightarrow$ el cuadrilátero BCQD es inscriptible con centro en el punto medio de $\overline{BD}$

$\therefore$ Por propiedad:
$m\angle CBQ = m\angle QDC = x$
$m\angle BDC = m\angle CQB = 45°$



Pero: Si $m\angle CQB = 45° \Rightarrow m\angle CQF = 45°$ y $m\angle FCQ = 90°$
$\therefore$ CQ = CF = CE = a
pero EF = ED = 2a (pues EFGD es cuadrado)
$\Rightarrow$ El ⊿CED es notable de 53°/2 $\Rightarrow \alpha = 26°30'$

Luego $m\angle FED = 45°$ y $m\angle FDE = x + \alpha$, reemplazando:
$45° = x + 26°30' \Rightarrow x = 18°30'$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 51) Unidad 2

Comunicación matemática

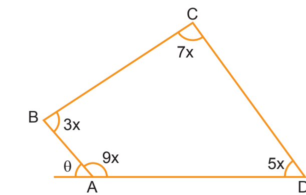
1. F, F, V

2. III, I, II

3. VI, IV, V, VII, II, III, I

Razonamiento y demostración

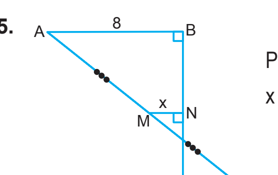
4.



En el cuadrilátero ABCD:
$9x + 3x + 7x + 5x = 360°$
$24x = 360°$
$x = 15°$
Del gráfico, (9x) es el mayor ángulo interior, entonces θ es el menor ángulo exterior.
Luego: $\theta + 9x = 180°$
$\theta + 9(15°) = 180°$
$\therefore \theta = 45°$

Clave D

5.



Por propiedad:
$x = \dfrac{8-4}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

$\therefore x = 2$

Clave E

6.

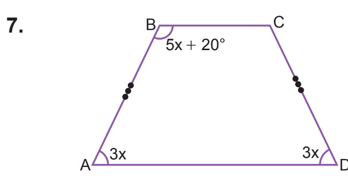
En el $\triangle BEC$:
$\alpha + \theta + 50° = 180°$
$\Rightarrow \alpha + \theta = 130°$ ...(1)

En el cuadrilátero ABCD:
$85° + 2\alpha + 2\theta + x = 360°$
$85° + 2(\alpha + \theta) + x = 360°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):
$85° + 2(130°) + x = 360°$
$345° + x = 360°$
$\therefore x = 15°$

Clave D

7.



Por dato, ABCD es un trapecio isósceles: ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$).



Luego, por ángulos conjugados internos:

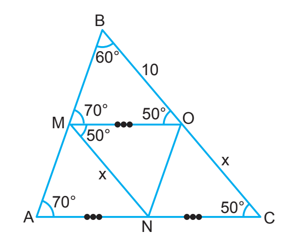
$(3x) + (5x + 20°) = 180°$

$8x = 160°$

$\therefore\ x = 20°$

Clave C

8.



Por dato: AMON es un paralelogramo

$\Rightarrow\ MN = OC = x \quad \wedge \quad \overline{MO} \parallel \overline{AC}$

Como: $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (dato), entonces el cuadrilátero MNCO resulta ser un paralelogramo.

$\Rightarrow MO = NC$

En el $\triangle ABC$, por el teorema de los puntos medios:

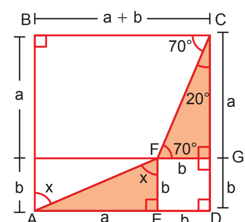
$MN = \dfrac{BC}{2}$

$x = \dfrac{10 + x}{2} \Rightarrow 2x = 10 + x$

$\therefore\ x = 10$

Clave B

9.



Del gráfico:

$\triangle AEF \cong \triangle FGC$

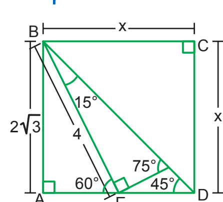
Como al ángulo **x** le corresponde el lado **a**, entonces:

$x = 70°$

Clave C

Resolución de problemas

10.

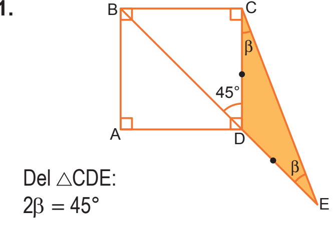


Del gráfico:

$BE = 4 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} = x$

Clave B

11.

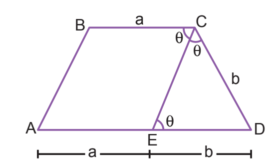


Del $\triangle CDE$:

$2\beta = 45°$

Clave C

12.



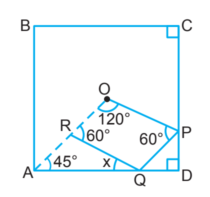
Por dato:

$a + b = 12$

$\therefore\ AD = a + b = 12$

Clave D

13.



Del dato: ROPQ es paralelogramo:

$m\angle ORQ = m\angle OPQ = 60°$

En el $\triangle ARQ$: $45° + x = 60°$

$x = 15°$

Clave B

14. Por propiedad de ángulos externos:

$\beta + \alpha + 90° = 360°$

$\alpha + \beta = 270°$

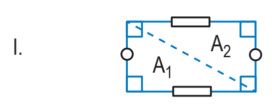
Clave D

Nivel 2 (página 52) Unidad 2

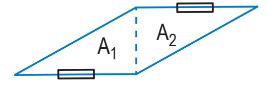
Comunicación matemática

15.

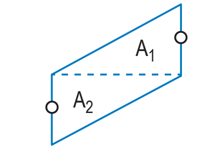
I.



II.

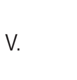


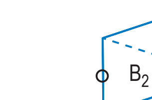
III.



IV.

V.





16. I. (V)

II. (V)

III. (F)

IV. (F)

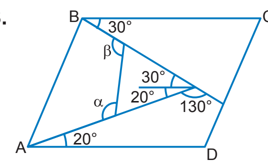
17. I. (V)

II. (F)

III. (V)

Razonamiento y demostración

18.



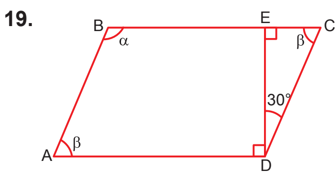
Propiedad: suma de ángulos externos de un triángulo

$\alpha + \beta + 130° = 360°$

$\alpha + \beta = 230°$

Clave B

19.



Del $\triangle$ DEC:

$\beta = 60° \quad \wedge \quad \alpha = 90° + 30°$

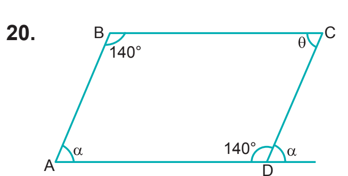
$\alpha = 120°$

Luego:

$\alpha - \beta = 120° - 60° = 60°$

Clave C

20.



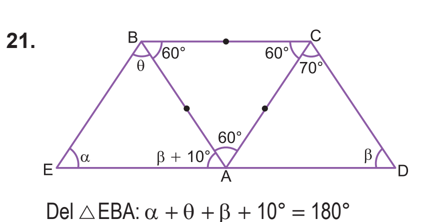
Por ser paralelogramo, se cumple:

$\alpha = \theta = 180° - 140° = 40°$

$\therefore \alpha + \theta = 80°$

Clave B

21.



Del $\triangle EBA$: $\alpha + \theta + \beta + 10° = 180°$

$\alpha + \theta + \beta = 170°$

Clave E

22.

$90° + 90° + 30° + x = 360°$

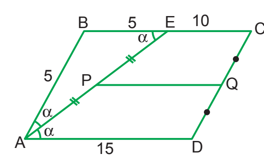
$30° + x = 180°$

$x = 150°$

Clave A

Resolución de problemas

23.



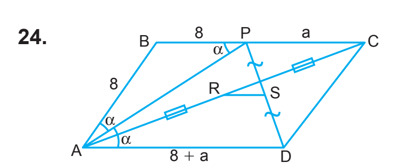
Dato: ABCD es un paralelogramo.
PQ: es mediana del trapecio AECD.

$PQ = \dfrac{10 + 15}{2}$

$\therefore\ PQ = 12{,}5$

Clave B

24.



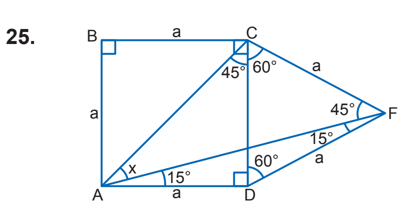
Por propiedad:

$RS = \dfrac{(8 + a) - a}{2}$

$\therefore\ RS = 4$

Clave D

25.



Del gráfico:

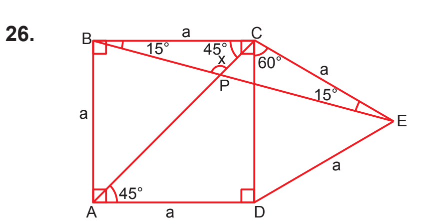
$x + 105° + 45° = 180°$

$x + 150° = 180°$

$\therefore\ x = 30°$

Clave B

26.



En el ◺PCB:

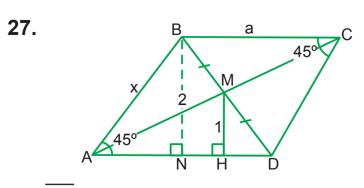
$x + 45° + 15° = 180°$

$x + 60° = 180°$

$\therefore\ x = 120°$

Clave E

27.



$\overline{MH}$: base media

$\Rightarrow BN = 2(1) = 2$

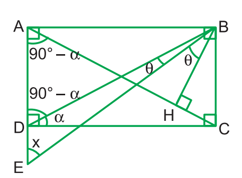
El ◺ANB notable de 45°

$x = 2(\sqrt{2})$

$\therefore\ x = 2\sqrt{2}$

Clave D

28.



Por propiedad:

$x + (90° - \alpha) = 90° + \theta$

$\Rightarrow x = \alpha + \theta$

En el triángulo EBD:

$x = 90° - \alpha - \theta$

$x = 90° - (\alpha + \theta)$

$x = 90° - x$

$2x = 90°$

$\therefore\ x = 45°$

Clave B

Nivel 3 (página 53) Unidad 2

Comunicación matemática

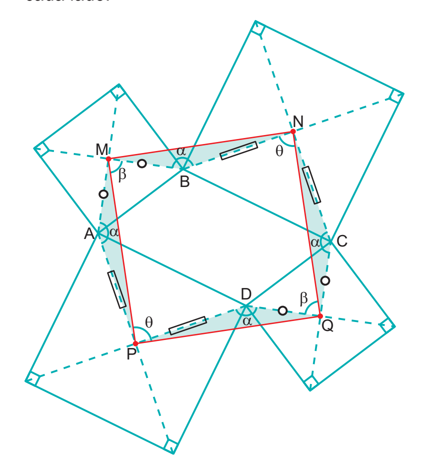
29.

30. I. (F)

II. (F)

III. (V)

31. Graficamos un paralelogramo y construimos cuatro cuadrados externos correspondientes a cada lado.



Como ABCD es un paralelogramo, entonces los cuadrados de centros M y Q son congruentes, al igual que los cuadrados de centros P y N. Por lo tanto vemos que:

$\overline{MA} \cong \overline{MB} \cong \overline{QD} \cong \overline{QC}$ y $\overline{NB} \cong \overline{NC} \cong \overline{PD} \cong \overline{PA}$

Luego, como: $m\angle NBM = m\angle MAP = m\angle PDQ = m\angle QCN$

$\Rightarrow \Delta MAP \cong \Delta PDQ \cong \Delta QCN \cong \Delta NBM$ (caso: LAL)

$\Rightarrow \overline{MN} \cong \overline{MP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QN}$; ▱MNPQ es equilátero.

Del gráfico tenemos que:

$m\angle AMP + \beta = 90°$

Pero: $m\angle PMN = \beta + m\angle BMN$

Sin embargo; como: $\triangle MAP \cong \triangle MBN$

$\Rightarrow m\angle AMP = m\angle BMN$

$\Rightarrow m\angle PMN = \beta + m\angle AMP = 90°$

$\Rightarrow m\angle PMN = 90°$

Asimismo :

$m\angle MNQ = m\angle NQP = m\angle QPM = 90°$

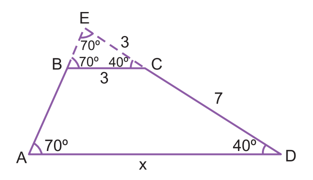
$\Rightarrow$ ▱MNPQ es equiángulo.

Finalmente: ▱MNPQ es equilátero y equiángulo.

$\therefore$ El ▱MNPQ es un cuadrado.

Razonamiento y demostración

32.



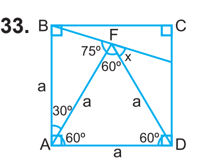
El △ADE resulta ser isósceles:

$x = 3 + 7$

$\therefore\ x = 10$

Clave C

33.



Del gráfico:

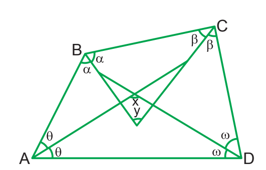
$x + 75° + 60° = 180°$

$x + 135° = 180°$

$\therefore\ x = 45°$

Clave B

34.



Del cuadrilátero ABCD:

$2\alpha + 2\beta + 2\omega + 2\theta = 360°$

$\alpha + \beta + \theta + \omega = 180°$

Luego:

$x = 180° - \omega - \theta$

$y = 180° - \alpha - \beta$

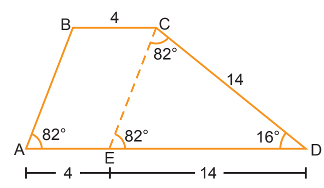
Luego:

$x + y = 360° - (\alpha + \beta + \theta + \omega)$

$\therefore\ x + y = 180°$

Clave E

35. De la figura:

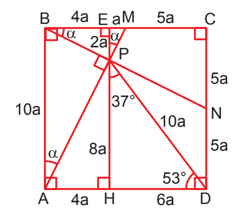


La mediana es:

$\dfrac{4 + (4 + 14)}{2} = \dfrac{22}{2} = 11$ m

Clave B

36.



Sea el lado del cuadrado: 10a

Del gráfico: $\alpha = 53°/2$

Dato: $4(10a) = 8\sqrt{2}$

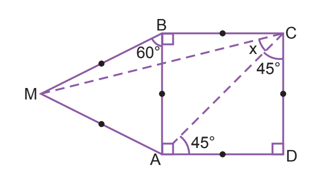
$10a = 2\sqrt{2}$

$\therefore$ PD = $2\sqrt{2}$

Clave E

Resolución de problemas

37.

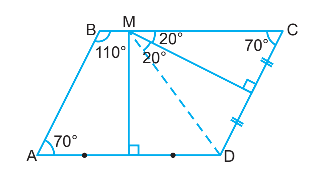


$m\angle MBC = 150° \Rightarrow m\angle BMC = 15°$

$\therefore$ $x + 15° + 45° = 90° \Rightarrow x = 30°$

Clave C

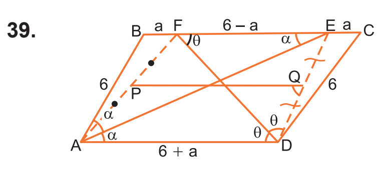
38. Según el enunciado:



$\therefore$ $m\angle CMD = 40°$

Clave C

39.



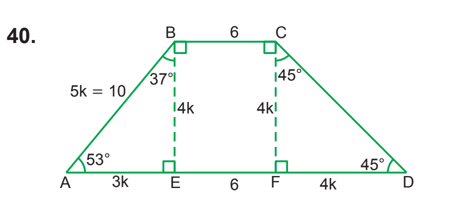
PQ: mediana del trapecio AFED

$$PQ = \frac{(6+a)+(6-a)}{2}$$

$\therefore$ PQ = 6

Clave D

40.



Por dato: ABCD es un trapecio.

Del gráfico:

$5k = 10 \Rightarrow k = 2$

Luego: $AD = 3k + 6 + 4k = 7k + 6$

$AD = 7(2) + 6 \quad \Rightarrow AD = 20$

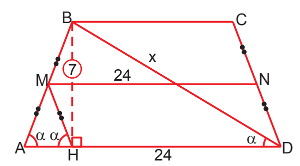
Piden la longitud de la mediana del trapecio (m).

$$\Rightarrow m = \frac{BC + AD}{2} = \frac{6 + 20}{2} = 13$$

$\therefore$ m = 13

Clave D

41.



Por dato, ABCD es un trapecio isósceles.

Del gráfico se deduce que MNDH es un paralelogramo $\Rightarrow$ MN = HD = 24

En el ⊿BHD por el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 7^2 + 24^2$

$x^2 = 625$

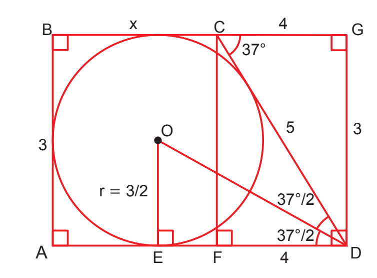
$\therefore$ x = 25

Clave C

CIRCUNFERENCIA

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 55) Unidad 2

1.



En el gráfico:

$AE = OE = \frac{3}{2}$

Del ⊿OED notable de $\frac{37°}{2}$:

$ED = 3r = \frac{9}{2}$

Además:

$\underbrace{ED}_{} = EF + 4$

$\frac{9}{2} = EF + 4 \Rightarrow EF = 0,5$

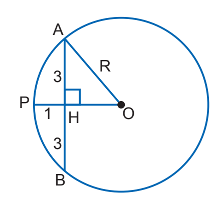
Piden:

$x = BC = AF = AE + EF$

$\therefore\ x = \frac{3}{2} + 0,5 = 2$

Clave E

2.



Trazamos: $OA = R$

Por propiedad: $AH = BH = 3$

Además: $OH = R - 1$

En el ⊿AHO por el teorema de Pitágoras:

$(OA)^2 = (AH)^2 + (OH)^2$

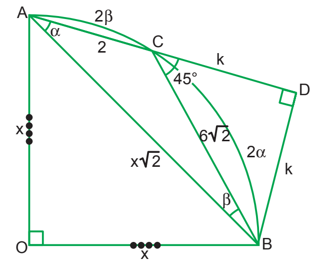
$R^2 = 3^2 + (R - 1)^2$

$R^2 = 9 + R^2 - 2R + 1$

$\therefore\ R = 5$

Clave D

3.



Prolongamos $\overline{AC}$ y trazamos la altura BD.

Sabemos:

$m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB} = 90°$

$2\alpha + 2\beta = 90°$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 45°$

Del ⊿BDC notable de 45°:

$k\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow k = 6$

Además: $CD = BD = 6$

En el ⊿AOB por el teorema de Pitágoras:

$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$

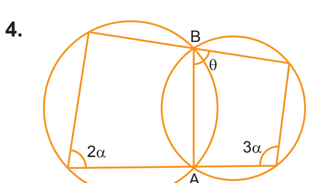
$(x\sqrt{2})^2 = 8^2 + 6^2$

$2x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50$

$\therefore\ x = 5\sqrt{2}$

Clave D

4.



Trazamos $\overline{AB}$.

Por propiedad de cuadriláteros inscritos:

$\theta = 2\alpha \ \wedge\ \theta + 3\alpha = 180°$

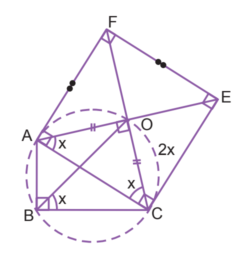
$2\alpha + 3\alpha = 180°$

$5\alpha = 180°$

$\alpha = 36°$

Clave C

5.



El cuadrilátero ABCO es inscriptible.

Trazamos una circunferencia por sus vértices.

Como $AO = OC \Rightarrow m\angle OAC = m\angle ACO = x$

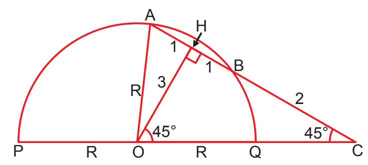
En el triángulo AOC:

$x + x + 90° = 180° \Rightarrow 2x = 90°$

$\therefore\ x = 45°$

Clave E

6.



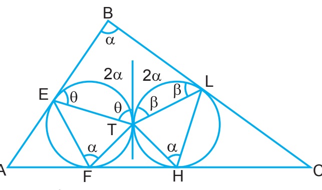
Por el teorema de Pitágoras:

$R^2 = 3^2 + 1^2$

$R^2 = 10 \quad \therefore\ R = \sqrt{10}$

Clave E

7.



Del gráfico:

$m\overset{\frown}{ET} = 2\theta \quad \wedge \quad m\overset{\frown}{TL} = 2\beta$

$2\alpha = 2\theta \qquad 2\alpha = 2\beta$

$\Rightarrow \alpha = \theta \qquad \Rightarrow \alpha = \beta$

En el cuadrilátero EBLT:

$2\theta + \alpha + 2\beta = 360°$

$2(\alpha) + \alpha + 2(\alpha) = 360°$

$5\alpha = 360°$

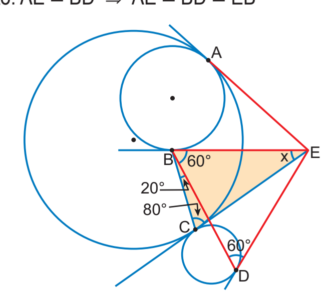
$\therefore\ \alpha = 72°$

Clave B

8. Por propiedad sabemos que $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ y $\overline{AE} \cong \overline{EC}$

Además $\overline{EC} \cong \overline{ED}$; entonces: $AE = EB = EC = ED$;

Dato: $AE = BD \Rightarrow AE = BD = EB$



△EBD es un triángulo equilátero:

$\Rightarrow m\angle EBD = m\angle BDE = 60°$; pero $m\angle DBC = 20°$

$\Rightarrow m\angle EBC = m\angle EBD + m\angle DBC$

Reemplazando:

$m\angle EBC = 60° + 20° = 80°$; pero el △EBC es isósceles; pues $\overline{EB} \cong \overline{EC}$ ($AE = EB = EC = ED$)

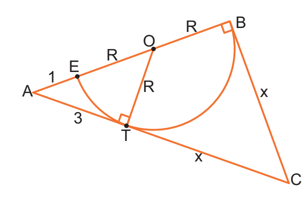
En el △EBC: $m\angle EBC = m\angle ECB = 80°$

$\Rightarrow\ 80° + 80° + x = 180° \quad \therefore\ x = 20°$

Clave C

9. Por propiedad: $BC = TC = x$ y en la semicircunferencia de centro O: $EO = OB = OT = R$

Además: $\overline{OT} \perp \overline{AC}$ (T: punto de tangencia)



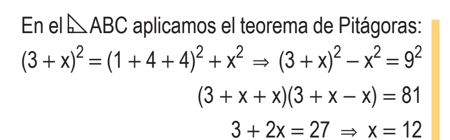
En el ⊿ATO aplicamos el teorema de Pitágoras:

$(1 + R)^2 = R^2 + 3^2$

$(R + 1)^2 - R^2 = 9 \Rightarrow (R + 1 + R)(R + 1 - R) = 9$

$2R + 1 = 9 \Rightarrow R = 4$

En el ◺ABC aplicamos el teorema de Pitágoras:



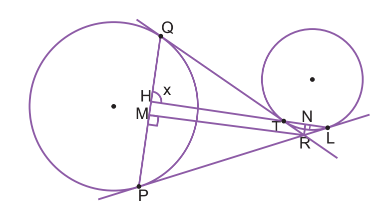
$(3 + x)^2 = (1 + 4 + 4)^2 + x^2 \Rightarrow (3 + x)^2 - x^2 = 9^2$

$(3 + x + x)(3 + x - x) = 81$

$3 + 2x = 27 \Rightarrow x = 12$

Clave C

10. Llamamos R al punto de intersección de las rectas $\overline{PL}$ y la prolongación de $\overline{QT}$.



Luego, trazamos $\overline{RM}$ y $\overline{RN}$ perpendiculares a $\overline{QP}$ y a $\overline{TL}$ respectivamente, por propiedad sabemos que QR = PR y RT = RL ⇒ $\overline{RM}$ y $\overline{RN}$ son mediatrices de los triángulos QRP y TRL.

$\Rightarrow m\angle QRM = m\angle MRP = \alpha$

y $m\angle TRN = m\angle NRL = \beta$

Luego: $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow m\angle NRM = 90°$

En el ⏢ HNRM:

$(180° - x) + 90° + m\angle NRM + 90° = 360°$

Reemplazando:

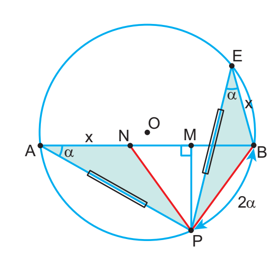
$360° - x + 90° = 360° \Rightarrow x = 90°$

Clave C

11. Trazamos la cuerda BP y luego la ceviana PN ($N \in \overline{AB}$) de manera que:

AN = EB = x, luego por propiedad:

$m\angle PEB = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = m\angle PAB = \alpha$



Luego: ΔPAN ≅ ΔPEB (caso LAL)

$\Rightarrow \overline{NP} \cong \overline{PB} \quad \wedge$ ΔPNB es isósceles entonces: $\overline{MP}$ es mediatriz de $\overline{NB}$ ⇒ NM = MB = b; pero: AM = a ⇒ AM = AN + NM

Reemplazando: $a = x + b \Rightarrow x = a - b$

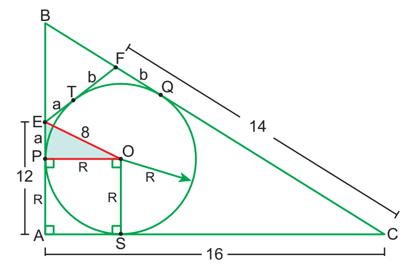
Clave E

12. Aplicamos el teorema de Pitot en el ⏢ AEFC:

AE + FC = EF + AC; Reemplazando:

$AE + 14 = 10 + 16 \Rightarrow AE = 12$

Luego trazamos $\overline{OS}$, como APOS es un cuadrado: ⇒ AP = OS = R



Por propiedad de la circunferencia: EP = ET = a

Luego: EA = EP + PA

Pero: EA = 12 ⇒ 12 = a + R ...(I)

Luego aplicamos el teorema de Poncelet en el △ EPO:

EP + PO = EO + 2i; donde i es el inradio

Reemplazando: a + R = 8 + 2i; pero de (I):

$a + R = 12 = 8 + 2i \Rightarrow i = 2$

Clave C

13. Aplicamos tres veces el teorema de Poncelet:

En el △BAE: AB + AE = BE + 2(3)
En el △CDE: CD + ED = CE + 2(4)   } Sumamos
En el △BEC: BE + CE = BC + 2(r)

AB+AE+CD+ED+~~BE~~+~~CE~~ = ~~BE~~+~~CE~~+BC+6+8+2r

(AB + CD) + (AE + ED) = BC + 14 + 2r;

Pero: BC = AD y AB = CD = 12

⇒ (12 + 12) + ~~AD~~ = ~~BC~~ + 14 + 2r

24 = 14 + 2r

∴ r = 5

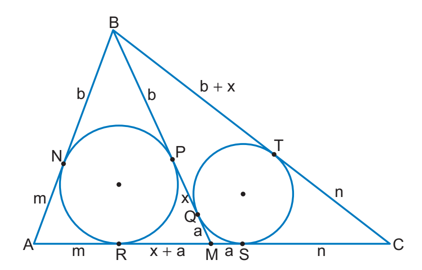
Clave B

14. Graficamos el triángulo ABC y trazamos la mediana BM, por propiedad de la circunferencia:

QM = MS = a, BP = BN = b

SC = TC = n, AN = AR = m

MP = MR = x + a y BQ = BT = b + x



Sabemos que: BC – AB = 12; reemplazamos:

(b + x + n) – (m + b) = 12

⇒ x + n – m = 12 ...(I)

Luego, si $\overline{BM}$ es mediana: AM = MC

reemplazando:

m + x + ~~a~~ = ~~a~~ + n ⇒ n – m = x

Luego en (I):

$x + \underbrace{(n - m)}_{x} = 12 \Rightarrow 2x = 12 \quad \therefore x = 6$

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 57) Unidad 2

Comunicación matemática

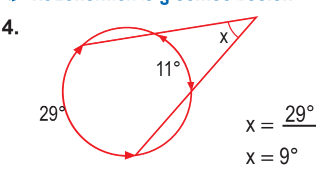
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.

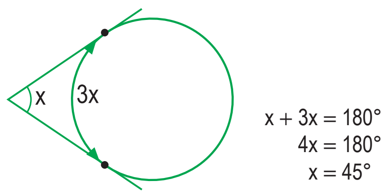


$x = \frac{29° - 11°}{2}$

$x = 9°$

Clave E

5.



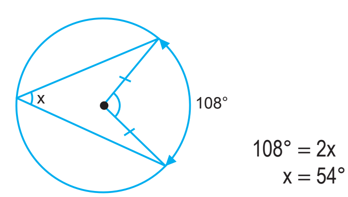
$x + 3x = 180°$

$4x = 180°$

$x = 45°$

Clave A

6.

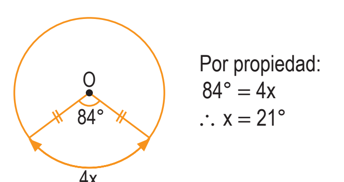


$108° = 2x$

$x = 54°$

Clave C

7. Piden: x



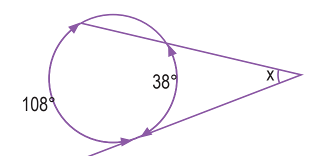
Por propiedad:

$84° = 4x$

$\therefore x = 21°$

Clave E

8. Piden: x



Por propiedad:

$x = \frac{108° - 38°}{2}$

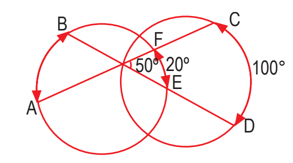
$x = \frac{70°}{2}$

$\therefore x = 35°$

Clave E



9.



Por ángulo interior:

$$\frac{m\overset{\frown}{AB} + 20°}{2} = 50°$$

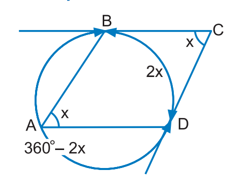
$$m\overset{\frown}{AB} + 20° = 100°$$

$$\therefore m\overset{\frown}{AB} = 80°$$

Clave B

Resolución de problemas

10.



Por ángulo exterior:

$$x = \frac{(360° - 2x) - 2x}{2}$$

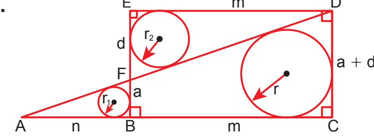
$$2x = 360° - 4x$$

$$6x = 360°$$

$$\therefore x = 60°$$

Clave E

11.



Por el teorema de Poncelet:

- $AD + 2r = (n + m) + (a + d)$
- $a + n = AF + 2r_1$
- $m + d = FD + 2r_2$

Sumando las tres expresiones y reduciendo tenemos:

$$AD + 2r = \underbrace{AF + FD}_{AD} + 2(r_1 + r_2)$$

$$2r = 2(r_1 + r_2)$$

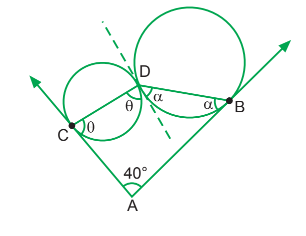
$$\Rightarrow r = r_1 + r_2$$

Por dato: $r_1 = 2 \ \wedge \ r_2 = 3$

$$\therefore r = 2 + 3 = 5$$

Clave A

12.



Piden: $m\angle CDB = x$

Del gráfico: $x = \theta + \alpha$

En el cuadrilátero ABDC:

$$40° + 2\theta + 2\alpha = 360°$$

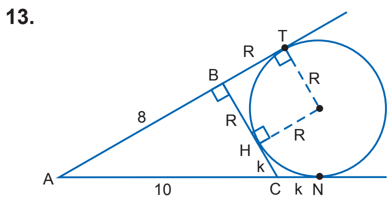
$$2(\theta + \alpha) = 320°$$

$$2(x) = 320°$$

$$\therefore x = 160°$$

Clave D

13.



Por dato:

$BC = 6 \Rightarrow R + k = 6$

$\Rightarrow k = 6 - R$ ...(1)

En el ◺ABC por el teorema de Pitágoras:

$AC = 10$

Por propiedad: $AT = AN$

$\Rightarrow 8 + R = 10 + k$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

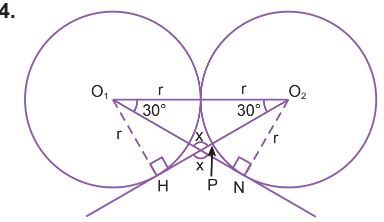
$$8 + R = 10 + (6 - R)$$

$$2R = 8$$

$$\therefore R = 4$$

Clave E

14.



Por dato, las circunferencias son congruentes, entonces la longitud de sus radios es la misma. Luego, los triángulos rectángulos O_1HO_2 y O_2NO_1 son notables de 30° y 60°.

En el $\triangle O_1PO_2$:

$$30° + 30° + x = 180°$$

$$60° + x = 180°$$

$$\therefore x = 120°$$

Clave A

Nivel 2 (página 58) Unidad 2

Comunicación matemática

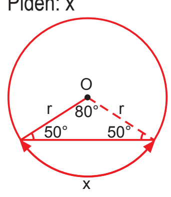
15.

16.

17.

Razonamiento y demostración

18. Piden: x

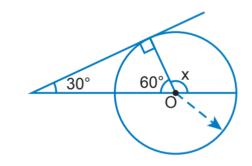


Por propiedad (ángulo central):

$\therefore x = 80°$

Clave B

19. Piden: x



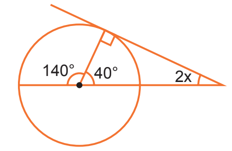
Del gráfico:

$$60° + x = 180°$$

$$\therefore x = 120°$$

Clave A

20. Piden: x



En el triángulo:

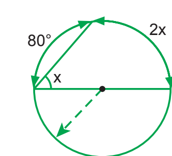
$$40° + 2x = 90°$$

$$2x = 50°$$

$$\therefore x = 25°$$

Clave E

21. Piden: x



Por propiedad:

$$80° + 2x = 180°$$

$$2x = 100°$$

$$\therefore x = 50°$$

Clave E

22.

Del gráfico:

En el ◺OTC:

$$4x + x = 90°$$

$$5x = 90°$$

$$\therefore x = 18°$$

Clave B

Resolución de problemas

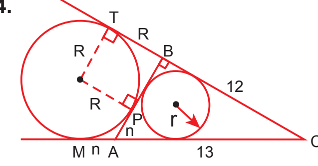
23.

El $\triangle OBC$ es equilátero

$\therefore x = 30°$

Clave D

24.



Por dato: $AB = 5 \Rightarrow R + n = 5$

$\Rightarrow n = 5 - R$ ...(1)



Por el teorema de Pitágoras: AC = 13

Por propiedad: CT = CM

$\Rightarrow 12 + R = 13 + n$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$12 + R = 13 + (5 - R)$

$2R = 6$

$\Rightarrow R = 3$

Por el teorema de Poncelet:

$AB + BC = AC + 2r$

$5 + 12 = 13 + 2r$

$4 = 2r$

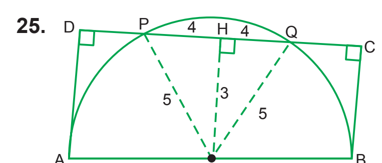
$\Rightarrow r = 2$

Piden: R/r

$\therefore \dfrac{R}{r} = \dfrac{3}{2}$

Clave D

25.



En el ⊿OHQ por el teorema de Pitágoras: OH = 3

$OH = \dfrac{AD + BC}{2}$

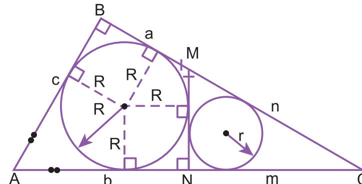
$3 = \dfrac{AD + BC}{2}$

$\therefore AD + BC = 6$

Clave D



26.



En el ⊿ABC por el teorema de Poncelet:

$(b + m) + 2R = c + (a + n)$ ...(1)

En el ⊿MNC por el teorema de Poncelet:

$n + 2r = m + MN$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$b + 2(R + r) = c + a + MN$ ...(3)

Del gráfico se deduce: $a = MN \wedge b = c$

Reemplazando en (3):

$b + 2(R + r) = b + MN + MN$

$2(R + r) = 2(MN)$

$\Rightarrow R + r = MN$

Por dato: MN = 12

$\therefore R + r = 12$

Clave A

Nivel 3 (página 59) Unidad 2

Comunicación matemática

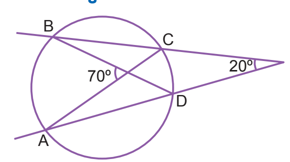
27.

28.

29.

Razonamiento y demostración

30.



Del gráfico:

$\dfrac{m\overset{\frown}{BA} + m\overset{\frown}{CD}}{2} = 70° \wedge \dfrac{m\overset{\frown}{BA} - m\overset{\frown}{CD}}{2} = 20°$

Entonces:

$m\overset{\frown}{BA} + m\overset{\frown}{CD} = 140°$

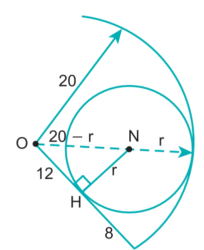
$m\overset{\frown}{BA} - m\overset{\frown}{CD} = 40°$ } (+)

$2m\overset{\frown}{BA} = 140° + 40° \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 90°$

$\therefore m\overset{\frown}{CD} = 50°$

Clave B

31.



En el ⊿OHN por el teorema de Pitágoras:

$12^2 + r^2 = (20 - r)^2$

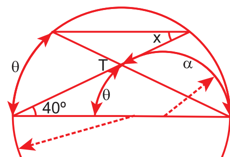
$144 + r^2 = 400 + r^2 - 40r$

$40r = 256$

$\therefore r = 6{,}4$

Clave B

32.



Por ángulo exterior:

$\dfrac{\alpha - \theta}{2} = 40°$

$\alpha - \theta = 80°$ ...(I)

Del gráfico: $\alpha + \theta = 180°$ ... (II)

De (I) y (II):

$2\theta = 100° \Rightarrow \theta = 50°$

Luego:

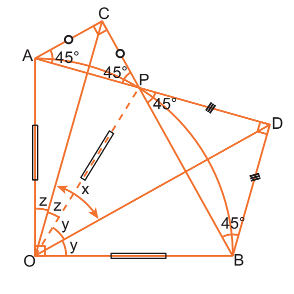
$\theta = 2x$

$50° = 2x \Rightarrow x = 25°$

Clave B

33. Como $\overset{\frown}{AB}$ es un cuadrante sabemos por propiedad que cualquier ángulo inscrito en dicho arco medirá 135°.

$\therefore m\angle APB = 135°$



Pero $m\angle APB + m\angle DPB = 180°$

$\Rightarrow m\angle DPB = 45°$ y $m\angle CPA = 45°$

(opuestos por el vértice)

Luego, como el ∠ACP y el ∠PDB son rectos, los triángulos ACP y PDB son isósceles.

Se tiene que el ⏢ ACPO es un trapezoide simétrico (AO = PO) y el ⏢ PDBO es también un trapezoide simétrico (OP = OB).

$\Rightarrow$ OC y OD son bisectrices; $m\angle AOC = m\angle COP = z$ y $m\angle POD = m\angle DOB = y$

Luego: $2z + 2y = 90°$

$\Rightarrow z + y = 45°$

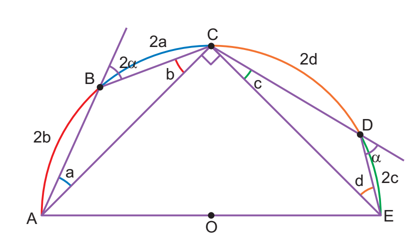
Pero: $x = z + y$ $\therefore x = 45°$

Clave D

34. Trazamos $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ formando los triángulos ABC y CDE, luego, por ángulo externo:

I. $m\angle CAB + m\angle BCA = 2\alpha$ y

II. $m\angle CED + m\angle DCE = \alpha$



Pero por propiedad de circunferencia:

$2m\angle CAB = m\overset{\frown}{BC}$

$2m\angle BCA = m\overset{\frown}{AB}$

$2m\angle CED = m\overset{\frown}{CD}$

$2m\angle DCE = m\overset{\frown}{DE}$

Pero $\overset{\frown}{AE}$ es una semicircunferencia:

$\therefore m\overset{\frown}{AE} = 180°$

Sumando los arcos:

$m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD} + m\overset{\frown}{DE} = 180°$

Reemplazando:

$2(m\angle CAB + m\angle BCA + m\angle CED + m\angle DCE) = 180°$

$2(2\alpha + \alpha) = 180°$

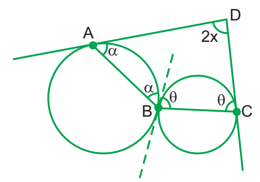
$3\alpha = 90°$

$\therefore \alpha = 30°$

Clave D

Resolución de problemas

35.



Piden: x

Por dato: $m\angle ABC = 3x$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 3x$ ...(1)

En el cuadrilátero ABCD:

$2x + 2\alpha + 2\theta = 360°$

$2x + 2(\alpha + \theta) = 360°$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

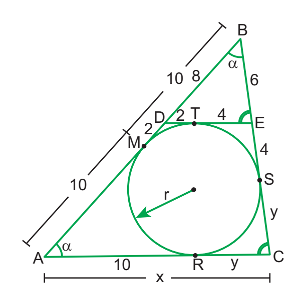
$2x + 2(3x) = 360°$

$8x = 360°$

$\therefore\ x = 45°$

Clave C

36. Graficamos el $\triangle$ ABC (ABC es isósceles):



Luego por propiedad de la circunferencia:
BM = MA = 10 pero: BS = BE + ES
$\Rightarrow$ 10 = 6 + ES $\Rightarrow$ ES = 4
Nuevamente: ES = ET = 4

Luego, el $\triangle$DBE es isósceles; pues: DE // AC
$\Rightarrow$ BE = 6 = DE = ET + TD
6 = DT + 4 $\Rightarrow$ DT = 2 y nuevamente:
DT = MD = 2 (m: punto medio de $\overline{AB}$)

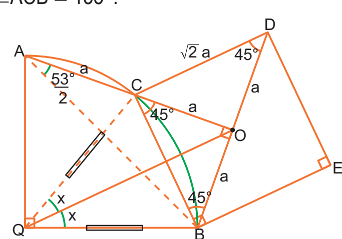
Luego: $\triangle$ABC ~ $\triangle$DBE (pues $\overline{AC}$ // $\overline{DE}$)

$\Rightarrow\ \dfrac{8}{20} = \dfrac{6}{x};\ \left(\dfrac{DB}{AB} = \dfrac{DE}{AC}\right)$

$\Rightarrow\ x = \dfrac{20.6}{8}\qquad \therefore\ x = 15$

Clave D

37. Trazamos la diagonal BD y prolongamos $\overline{AC}$ hasta O; pues como $\overset{\frown}{AB}$ es un cuadrante m$\angle$ACB = 135°.

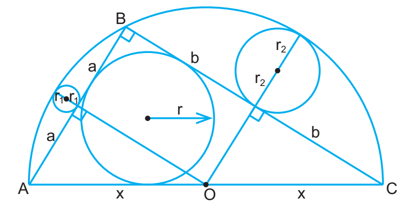


$\Rightarrow$ m$\angle$BCO = 45°
$\triangle$CDO es notable de 45°:
$\Rightarrow$ OC = OD = a y CD = $\sqrt{2}$ a
Dato: CD = $\sqrt{2}$ (AC)
AC = a; luego el $\triangle$AOB es un triángulo rectángulo notable de 53°/2, pues AO = 2a y OB = a.
Como m$\angle$CAB = 53°/2, por propiedad de la circunferencia m$\overset{\frown}{CB}$ = 2m$\angle$CAB, entonces:
m$\angle$ $\overset{\frown}{CB}$ = 53°

Luego:
⏢QCOB es un trapezoide simétrico (OC = OB y CO = OB)
$\overline{QO}$ es bisectriz m$\angle$CQB = 2x; pero
m$\overset{\frown}{CB}$ = m$\angle$CQB = 53°
$\Rightarrow$ 2x = 53°
x = 53°/2 $\qquad\therefore$ x = 36°30'

Clave C

38. Sabemos que los centros de las circunferencias tangentes interiores son colineales.



$x = 2r_1 + b$
$x = 2r_2 + a$
$2x = 2(r_1 + r_2) + a + b$ ...(I)

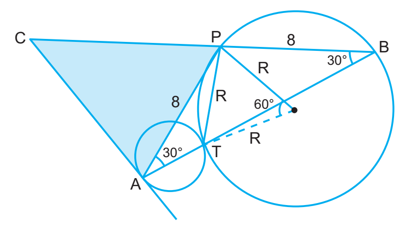
Teorema de Poncelet:
2r + 2x = 2a + 2b
$\Rightarrow$ a + b = r + x ... (II)

Reemplazamos (II) en (I):
$2x = 2(r_1 + r_2) + (r + x)$
$x = 2(r_1 + r_2) + r$
$\therefore\ x = r + 2(r_1 + r_2)$

Clave E

39. Piden AB

Dato: PB = 8



Se sabe que ⏢ACPT es inscriptible

$\Rightarrow$ m$\angle$PAT = m$\angle$PCT = 30°

Del dato PT = R, m$\overset{\frown}{PT}$ = 60°

Por ángulo inscrito m$\angle$TBP = 30°, entonces

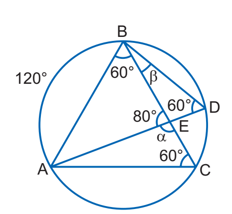
$\triangle$APB es isósceles, AP = PB = 8, además, m$\angle$APB = 120°

En el $\triangle$ABP, se cumple:

AB = $8\sqrt{3}$

Clave C

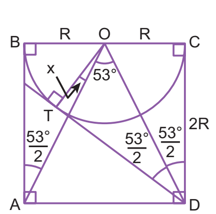
40. Piden β



Por ángulo inscrito en la circunferencia:
m$\angle$ADB = m$\angle$ACB = 60°
Del dato, α = 100°, entonces, m$\angle$AEB = 80°
Luego, en el $\triangle$EBD (ángulo exterior) se cumple:
β + 60° = 80°
β = 20°

Clave A

41.



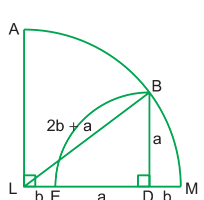
Nos piden m$\angle$TOA = x
Los triángulos rectángulos ABO y OCD son de 53°/2. Como $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, entonces m$\angle$AOD = 53°.

Por teorema, $\overline{DO}$ es bisectriz del ángulo formado por las tangentes, entonces, m$\angle$TDO = $\dfrac{53°}{2}$.

Luego, en el ⊿OTD: $x + 53° + \dfrac{53°}{2} = 90°$
x = 10,5°

Clave D

42.



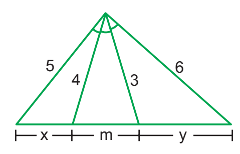
Si llamamos a LE = DM = b y ED = a
Entonces por Pitágoras en el $\triangle$LBD:
$(2b + a)^2 = (b + a)^2 + a^2$
$4b^2 + a^2 + 4ab = b^2 + a^2 + 2ab + a^2$
$3b^2 + 2ab - a^2 = 0$
3b ✕ –a
b ✕ a
(3b – a)(b + a) = 0
a = 3b
$\Rightarrow$ $\triangle$LBD es notable de 37° y 53°:
$\therefore$ m$\overset{\frown}{AB}$ = m$\angle$ALB = 53°

Clave C

PROPORCIONALIDAD

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 62) Unidad 2

1.



Por el teorema de la bisectriz:

$\frac{5}{x}=\frac{3}{m} \Rightarrow m=\frac{3x}{5}$ ...(1)

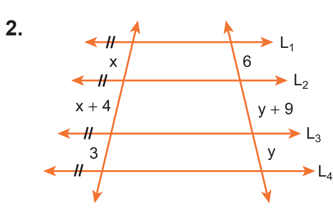
$\frac{4}{m}=\frac{6}{y} \Rightarrow m=\frac{4y}{6}$ ...(2)

Igualando (1) y (2):

$\frac{3x}{5}=\frac{4y}{6}$ $\therefore \frac{x}{y}=\frac{10}{9}$

Clave A

2.



Por el teorema de Thales:

$\frac{x}{3}=\frac{6}{y} \quad \wedge \quad \frac{x}{x+4}=\frac{6}{y+9}$

$xy=18 \quad \wedge \quad xy+9x=6x+24$

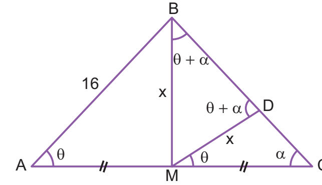
$(18)+3x=24$

$3x=6$

$\therefore x=2$

Clave A

3.



Trazamos $\overline{MD}$ paralela a $\overline{AB}$.

$\Rightarrow m\angle DMC=\theta$

El $\triangle BMD$ es isósceles $\Rightarrow MD=BM=x$

Como $\overline{AB} \,//\, \overline{MD}$:

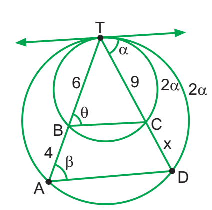
Por el teorema de los puntos medios:

$MD=\frac{AB}{2}$

$x=\frac{16}{2} \Rightarrow x=8$

Clave E

4.



Trazamos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$.

Por ángulos en la circunferencia:

$\theta=\frac{m\overset{\frown}{TC}}{2}=\frac{2\alpha}{2} \quad \wedge \quad \beta=\frac{m\overset{\frown}{TD}}{2}=\frac{2\alpha}{2}$

$\Rightarrow \theta=\alpha \qquad \Rightarrow \beta=\alpha$

$\therefore$ Entonces: $\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$.

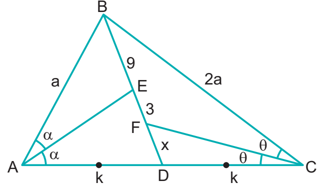
Por el Teorema de Tales:

$\frac{6}{4}=\frac{9}{x}$

$6x=36 \qquad \therefore x=6$

Clave B

5.



Por propiedad de la bisectriz interior:

- $\frac{k}{a}=\frac{x+3}{9}$ .... (1)
- $\frac{2a}{k}=\frac{12}{x}$ .... (2)

Multiplicando (1) y (2):

$\left(\frac{k}{a}\right)\cdot\left(\frac{2a}{k}\right)=\left(\frac{x+3}{9}\right)\left(\frac{12}{x}\right) \Rightarrow 2=\frac{4(x+3)}{3x}$

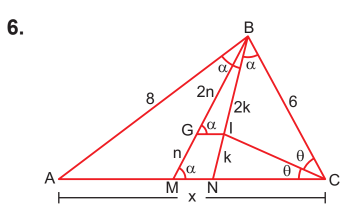
$6x=4x+12$

$2x=12$

$\therefore x=6$

Clave C

6.



Como G es baricentro: $BG=2GM$

Como $m\angle BGI=m\angle BMN=\alpha$

Entonces: $\overline{GI} \,//\, \overline{MN}$

$\frac{BG}{GM}=\frac{BI}{IN} \Rightarrow \frac{2GM}{GM}=\frac{BI}{IN}$

$\Rightarrow BI=2IN$

Luego, por el teorema del incentro:

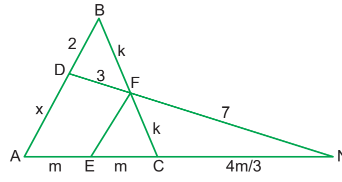
$\frac{BI}{IN} \Rightarrow \frac{8+6}{x} \Rightarrow \frac{(2IN)}{IN}=\frac{14}{x}$

$x=\frac{14}{2}$

$\therefore x=7$

Clave B

7.



Por dato: $\overline{AB} \,//\, \overline{EF}$

$\frac{CF}{FB}=\frac{CE}{EA} \quad \wedge \quad \frac{NF}{FD}=\frac{NE}{EA}$

$1=\frac{CE}{EA} \qquad \frac{7}{3}=\frac{NC+m}{m}$

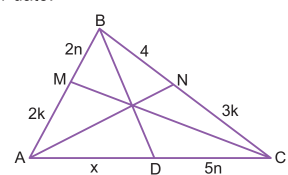
$\Rightarrow EA=CE \qquad \Rightarrow NC=\frac{4m}{3}$

Por el teorema de Menelao:

$xk\left(\frac{4m}{3}\right)=2k\left(\frac{10m}{3}\right) \quad \therefore x=5$

Clave A

8. Por dato:



Por el teorema de Ceva:

$AM\cdot(BN)\cdot CD=MB\cdot(NC)\cdot AD$

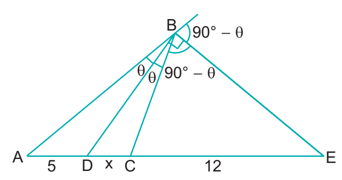
$2k\cdot(4)\cdot 5n=2n\cdot(3k)\cdot x$

$40=6x$

$\therefore x=\frac{20}{3}$

Clave C

9.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}=\frac{5}{x}$ ...(1)

Por el teorema de la bisectriz exterior:

$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{CE}=\frac{17+x}{12}$ ...(2)

De (1) y (2):

$\frac{5}{x}=\frac{17+x}{12} \Rightarrow 60=(17+x)x$

$3(20)=(17+x)x$

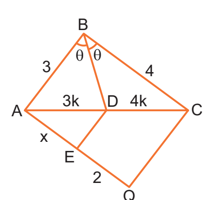
$3(17+3)=(17+x)x$

Por comparación: $x=3$

Clave C

10. Piden: x

Datos: $\overline{DE} \,//\, \overline{CQ}$



En el triángulo ABC (teorema de la bisectriz interior)

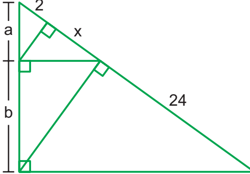
$AD=3k$ y $DC=4k$

Luego, como $\overline{DE} \,//\, \overline{CQ}$ aplicamos el teorema de Thales:

$\frac{3k}{x}=\frac{4k}{2} \Rightarrow x=1{,}5$

Clave B

11.





Aplicamos el teorema de Thales:

$$\frac{2}{x}=\frac{a}{b}=\frac{2+x}{24}$$

$$\frac{2}{x}=\frac{2+x}{24}$$

$$1+48=x^2+2x+1$$

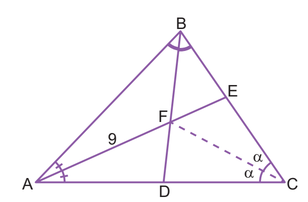
$$7^2=(x+1)^2$$

$$7=x+1$$

$$\therefore\ x=6$$

Clave E

12. Del enunciado:



F: incentro del $\triangle$ ABC.

$\Rightarrow$ $\overline{FC}$: bisectriz interior

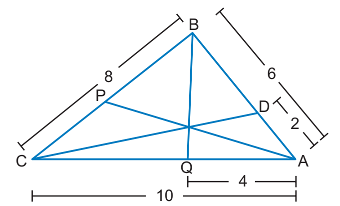
Por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{EC}{EF}=\frac{AC}{AF}\Rightarrow\frac{AC}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ AC=12$$

Clave A

13. Del enunciado:



En la figura:

BD = 4 y CQ = 6

Por teorema de Ceva:

(CP)(BD)(AQ) = (BP) (CQ)(AD)

(8 – BP)(4)(4) = (BP)(6)(2)

32 – 4(BP) = 3(BP)

$\therefore$ BP = $\frac{32}{7}$ u

Clave B

14. Por el teorema de Thales:

$$\frac{EC}{BE}=\frac{DC}{AD}\Rightarrow\frac{x-4}{x-2}=\frac{x-3}{6}$$

$$6(x-4)=(x-2)(x-3)$$

$$6x-24=x^2-5x+6$$

$$0=x^2-11x+30$$

$$0=(x-5)(x-6)$$

$$\Rightarrow x_1=5\ \wedge\ x_2=6$$

$$\therefore\ x_1+x_2=11$$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 64) Unidad 2

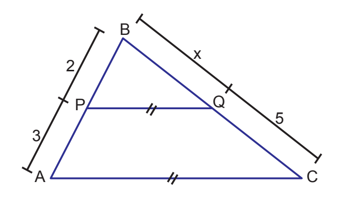
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3.



$\overline{PQ}$ // $\overline{AC}$

Datos: PB = 2

PA = 3

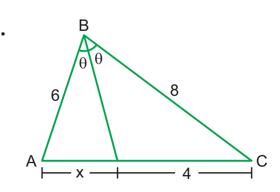
QC = 5

Aplicando corolario:

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{5}\Rightarrow x=\frac{10}{3}$$

Clave D

4.

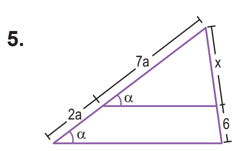


Por el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{6}{8}=\frac{x}{4}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{x}{4}\qquad\therefore x=3$$

Clave B

5.



$$\frac{7a}{2a}=\frac{x}{6}$$

$$x=21$$

$$\therefore x-1=20$$

Clave A

6. Del gráfico:

$$\frac{2}{3}=\frac{x-1}{4}$$

$$\frac{8}{3}=x-1$$

$$x=\frac{8}{3}+1\quad\Rightarrow\quad x=\frac{11}{3}$$

Clave A

7. Del gráfico:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{9}{6}$$

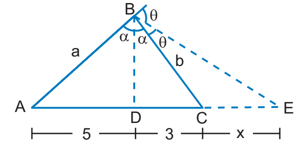
$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2x+2=3x-3$$

$$\therefore\ x=5$$

Clave D

Resolución de problemas

8.



En el $\triangle$ABC $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

En el $\triangle$ABE $\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{8+x}{x}$

Entonces:

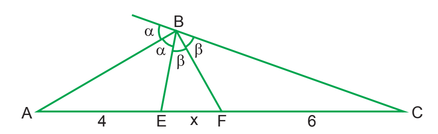
$$\frac{5}{3}=\frac{a}{b}=\frac{8+x}{x}$$

$$\Rightarrow 5x=24+3x$$

$$\therefore\ x=12$$

Clave E

9. De la figura:



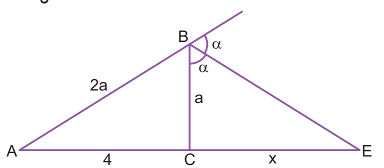
Se cumple:

$$\frac{6}{x}=\frac{10+x}{4}\Rightarrow x=2$$

Luego: AC = 4 + 2 + 6 = 12

Clave B

10. Del gráfico:



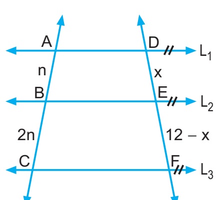
Entonces:

$$\frac{2a}{4+x}=\frac{a}{x}\Rightarrow 2x=4+x$$

$$\therefore\ x=4$$

Clave D

11.



Por el teorema de Thales:

$$\frac{2n}{n}=\frac{12-x}{x}\Rightarrow 2x=12-x$$

$$3x=12$$

$$\therefore\ x=4$$

Clave C

Nivel 2 (página 65) Unidad 2

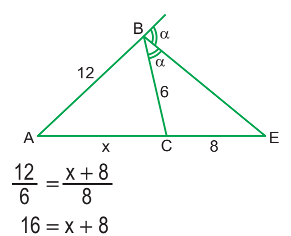
Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14.



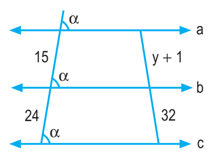
$\frac{12}{6} = \frac{x+8}{8}$

$16 = x + 8$

$x = 8$

Clave C

15.



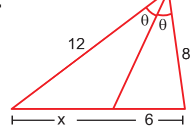
$\frac{15}{24} = \frac{y+1}{32}$

$20 = y + 1$

$19 = y$

Clave A

16.

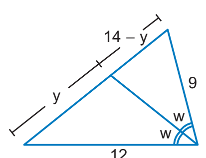


$\frac{12}{x} = \frac{8}{6}$

$x = 9$

Clave A

17.



$\frac{12}{y} = \frac{9}{14-y}$

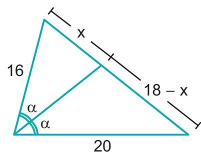
$168 = 9y + 12y$

$168 = 21y$

$y = 8$

Clave B

18.



$\frac{16}{x} = \frac{20}{18-x}$

$288 = 16x + 20x$

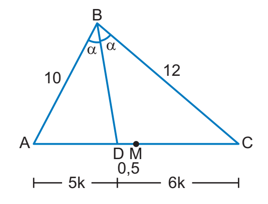
$288 = 36x$

$x = 8$

Clave C

Resolución de problemas

19.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$AD = 5k \ \wedge \ DC = 6k$

Además, M es punto medio de $\overline{AC}$.

$\Rightarrow AM = MC = \frac{11k}{2}$

Del gráfico:

$AD + DM = AM$

$5k + 0,5 = \frac{11k}{2}$

$0,5 = 0,5k \Rightarrow k = 1$

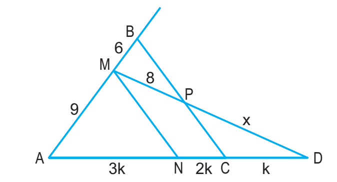
Piden:

$AC = 11k = 11(1)$

$\therefore \ AC = 11$

Clave B

20.



Por dato: $\overline{MN} // \overline{BC} \ \wedge \ AN = ND$

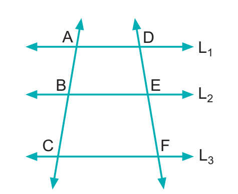
Por el teorema de Tales:

- $\frac{AN}{NC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow AN = 3k \wedge NC = 2k$
- $\frac{CD}{NC} = \frac{PD}{PM} \Rightarrow \frac{k}{2k} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{1}{2}$

$\therefore \ x = 4$

Clave B

21.



Dato: 3AB = 2BC; DF = 15

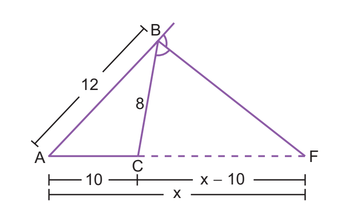
Por el teorema de Tales tenemos:

$\frac{AB + BC}{BC} = \frac{15}{EF}$

$\frac{2k + 3k}{3k} = \frac{15}{EF} = \frac{5}{3} \qquad \therefore \ EF = 9$

Clave D

22.



Por el teorema de la bisectriz exterior:

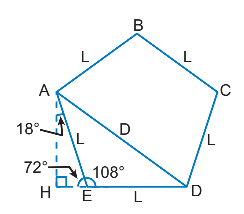
$\frac{12}{8} = \frac{x}{x-10} \Rightarrow x = 30$

Clave D

Nivel 3 (página 65) Unidad 2

Comunicación matemática

23.



Sabemos que el ángulo interno de un pentágono regular sería:

$m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow m\angle i = \frac{180°(5-2)}{5}$

$\Rightarrow m\angle i = 108°$

$\triangle AHE$ es un triángulo notable de 18° y 72°.

$\Rightarrow AE = L$

$\therefore AH = \frac{L}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$HE = \frac{L}{4}(\sqrt{5} - 1)$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿AHD:

$D^2 = \left(\frac{L}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(L + \frac{L}{4}(\sqrt{5} - 1)\right)^2$

$\Rightarrow \frac{D}{L} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \frac{D}{L} = 1,618$

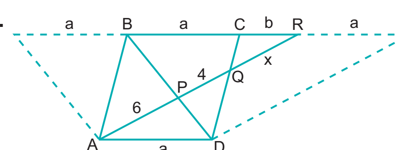
Luego, por dato:

$\frac{a}{b} = \frac{D}{L} \Rightarrow \frac{a}{b} = 1,618$

24.

Razonamiento y demostración

25.



Notamos que:

$\frac{a+b}{a} = \frac{4+x}{6} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{b}{a} = \frac{4+x}{6} \quad ...(1)$

$\frac{b}{a} = \frac{x}{10} \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):

$1 + \frac{x}{10} = \frac{4+x}{6}$

Resolviendo:

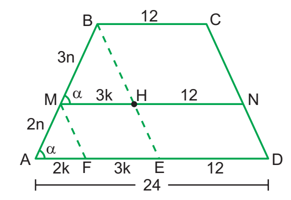
$\frac{10+x}{10} = \frac{4+x}{6} \Rightarrow 60 + 6x = 40 + 10x$

$20 = 4x$

$\therefore \ x = 5$

Clave E

26.





Por dato: $\overline{BC} // \overline{AD}$.

Del gráfico: $\overline{MN} // \overline{AD} \Rightarrow \overline{MN} // \overline{BC}$.

Trazamos $\overline{BE} // \overline{CD}$ y luego $\overline{MF} // \overline{BE}$.

Entonces se forman los paralelogramos BCNH, BCDE y MHEF.

Por el teorema de Tales:

$AF = 2k \;\wedge\; FE = 3k$

Luego: $AD = AE + ED$

$24 = 5k + 12 \Rightarrow 5k = 12$

$k = \dfrac{12}{5}$

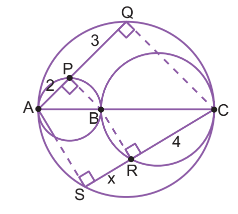
Piden:

$MN = 3k + 12 = 3\left(\dfrac{12}{5}\right) + 12 = \dfrac{96}{5}$

$\therefore MN = \dfrac{96}{5}$

Clave B

27.



Por dato: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros.

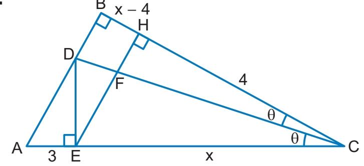
Por el teorema de Thales:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{2}{3} \wedge \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{x}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{4} = \dfrac{2}{3} \qquad \therefore\; x = \dfrac{8}{3}$

Clave A

28.



Por el teorema de la bisectriz:

$EC = BC = x \Rightarrow BH = x - 4$

Por el teorema de Tales:

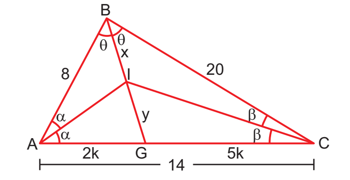
$\dfrac{x-4}{4} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow x^2 - 4x = 12 = 6(2)$

$x(x-4) = 6(6-4)$

$\therefore\; x = 6$

Clave E

29.



En el $\triangle$ABC aplicamos el teorema de la bisectriz interior:

$AG = 2k \quad \wedge \quad GC = 5k$

Luego: $AC = 7k$

$14 = 7k$

$\Rightarrow k = 2$

En el $\triangle$ABG por el teorema de la bisectriz interior:

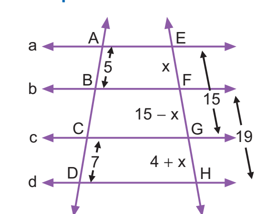
$\dfrac{8}{2k} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{8}{2(2)} = \dfrac{x}{y}$

$\therefore\; \dfrac{x}{y} = 2$

Clave B

Resolución de problemas

30.



Aplicando el teorema de Thales:

$\dfrac{5}{7} = \dfrac{x}{4+x}$

$20 + 5x = 7x$

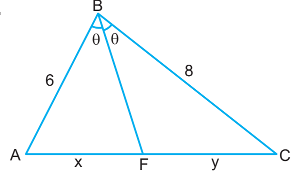
$20 = 2x$

$10 = x$

$\therefore\; FG = 15 - 10 = 5$

Clave E

31.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{y}$ ...(β)

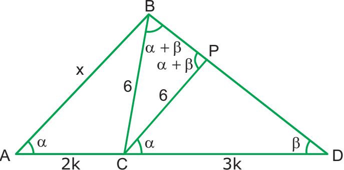
$x + y = 7$ ...(α)

De (α) y (β):

$x = 3 \;\wedge\; y = 4$

Clave B

32.



Dato: $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{2k}{3k}$

Trazamos $\overline{CP} // \overline{AB} \Rightarrow$ el $\triangle$BCP es isosceles.

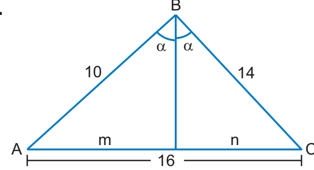
$\triangle CPD \sim \triangle ABD$

$\dfrac{CD}{6} = \dfrac{AD}{x} \Rightarrow \dfrac{3k}{6} = \dfrac{5k}{x}$

$\therefore\; x = 10$

Clave B

33.



Por el teorema de la bisectriz interior:

$\dfrac{10}{14} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{5k}{7k} \qquad m + n = 16$

$12k = 16$

$k = \dfrac{4}{3}$

Piden:

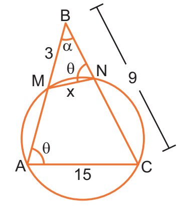
$x = n - m$

$x = 7k - 5k = 2\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$

Clave E

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 67) Unidad 2

1.



Trazamos $\overline{MN}$, entonces el ⏢AMNC es un cuadrilátero inscriptible.

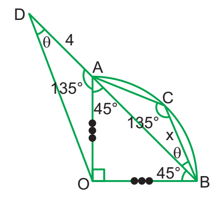
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle NBM$

$\Rightarrow \dfrac{9}{3} = \dfrac{15}{x} \Rightarrow 9x = 45$

$\therefore\ x = 5$

Clave B

2.



Por dato: $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{OD} \quad \wedge \quad OD = 2AB$

$\Rightarrow m\angle ABC = m\angle ADO = \theta$

Por propiedad: $m\angle ACB = 135°$

Luego: $\triangle DAO \sim \triangle BCA$

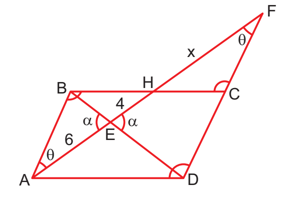
$\Rightarrow \dfrac{AD}{BC} = \dfrac{OD}{AB}$

$\dfrac{4}{x} = \dfrac{2AB}{AB} \Rightarrow 4 = 2x$

$\therefore\ x = 2$

Clave D

3.



Del gráfico:

$\triangle ABH \sim \triangle FDA$

$\Rightarrow \dfrac{10}{x+10} = \dfrac{AB}{FD}$ ... (1)

Además: $\triangle AEB \sim \triangle FED$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{FD} = \dfrac{6}{x+4}$ ... (2)

De (1) y (2):

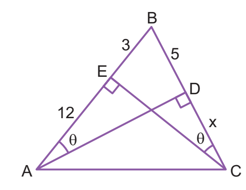
$\dfrac{10}{x+10} = \dfrac{6}{x+4} \Rightarrow 10x + 40 = 6x + 60$

$4x = 20$

$\therefore x = 5$

Clave C

4.



⊿ADB ~ ⊿CEB

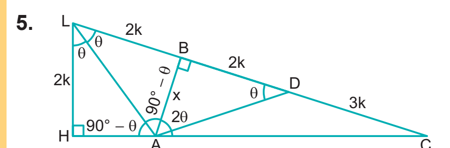
$\dfrac{5}{15} = \dfrac{3}{5+x}$

$9 = 5 + x$

$x = 4$

Clave C

5.



Se construye el $\triangle LAD$ isósceles.

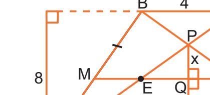
Por el teorema de la bisectriz: AH = AB

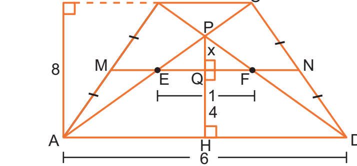
En el ⊿LHC aplicamos el teorema de la bisectriz interior:

$\dfrac{2k}{x} = \dfrac{7k}{7} \Rightarrow x = 2$

Clave B

6.





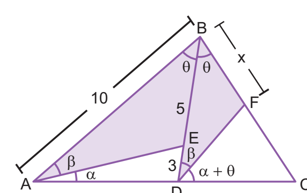
En el gráfico:

$\triangle EPF \sim \triangle APD$

$\dfrac{PQ}{PH} = \dfrac{EF}{AD} \Rightarrow \dfrac{x}{x+4} = \dfrac{1}{6} \quad \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}$

Clave A

7.



Del gráfico tenemos:

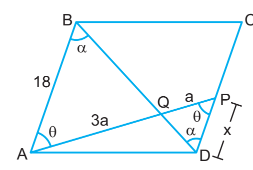
$\triangle ABE \sim \triangle DBF$;

$BE = 5 \wedge ED = 3$

$\dfrac{5}{x} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow x = 4$

Clave B

8.



Si $\overline{AB} \mathbin{//} \overline{DC} \Rightarrow m\angle B = m\angle D$

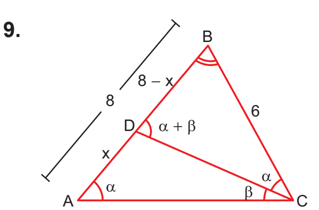
$AP = 4(QP) = 4a$

Luego; $\triangle ABQ \sim \triangle PDQ$

$\dfrac{18}{x} = \dfrac{3a}{a} \Rightarrow x = 6$ m

Clave B

9.



Del gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$

$\dfrac{6}{8} = \dfrac{8-x}{6} \Rightarrow 36 = 64 - 8x$

$8x = 28$

$\therefore\ x = 3{,}5$ m

Clave C

10.

Por dato: $\overline{AC} \mathbin{//} \overline{PB}$

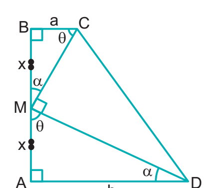
Del gráfico: $\Delta CBA \sim TBPA$

$\Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{9}$

$\therefore\ x = 16$

Clave D

11.



En el ⊿CBM: $\alpha + \theta = 90°$

Luego: ⊿DAM ~ ⊿MBC

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{x} \Rightarrow x^2 = ab$

$x = \sqrt{ab}$

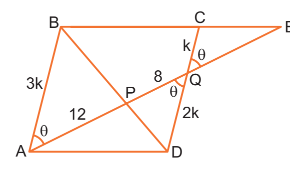
Piden:

$AB = 2x = 2(\sqrt{ab})$

$\therefore\ AB = 2\sqrt{ab}$

Clave D

12.



Del gráfico:

$\triangle ABP \sim \triangle QDP$

$\dfrac{AB}{QD} = \dfrac{12}{8} \Rightarrow \dfrac{AB}{QD} = \dfrac{3}{2}$

$AB = 3k \quad \wedge \quad QD = 2k$

Además, ABCD es un paralelogramo:

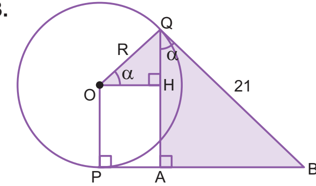
$AB = CD \Rightarrow AB = CQ + QD \Rightarrow CQ = k$

$\triangle ECQ \sim \triangle EBA$

$\dfrac{EQ}{EA} = \dfrac{CQ}{BA} \Rightarrow \dfrac{EQ}{20 + EQ} = \dfrac{k}{3k} \quad \therefore EQ = 10$

Clave E

13.



Trazamos $\overline{HO} \perp \overline{AQ}$.

$m\angle QOH = m\angle BQA \wedge OH = PA$

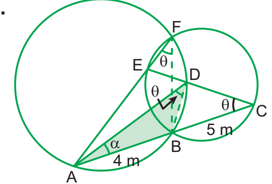
$\Rightarrow \Delta OHQ \sim \Delta QAB$

$\frac{OQ}{QB} = \frac{OH}{QA} = \frac{PA}{QA}$

$\frac{R}{21} = \frac{3}{7} \quad \therefore R = 9$

Clave A

14.



Trazamos $\overline{FB}$ y $\overline{BD}$.

$\theta = m\angle AFB = m\angle ADB = m\angle DCA$

$\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle ABD$

$\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{9} = \frac{4}{AD}$

$\therefore AD = 6$ m

Clave C

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 69) Unidad 2

Comunicación matemática

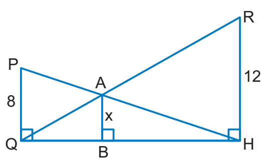
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.

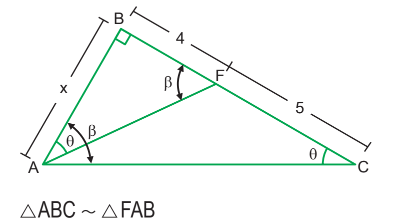


Por propiedad: $x = \frac{(8)(12)}{8+12} = \frac{96}{20} = 4,8$

$\therefore x = 4,8$

Clave B

5.



$\triangle ABC \sim \triangle FAB$

Por el primer criterio tenemos:

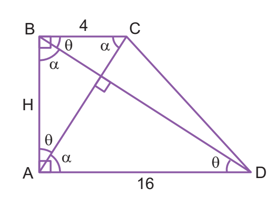
$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 4(9)$

$x = 2(3)$

$\therefore x = 6$

Clave A

6.



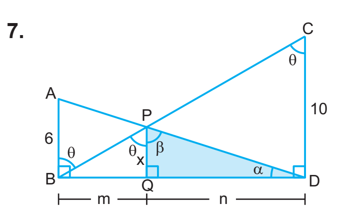
$\triangle ABC \sim \triangle DAB$

$\frac{4}{H} = \frac{H}{16} \Rightarrow H^2 = 4(16)$

$H = 2(4) = 8$ m

Clave B

7.



Del gráfico tenemos:

$\triangle BQP \sim \triangle BDC: \quad \frac{x}{10} = \frac{m}{n+m} \quad ...(\alpha)$

$\triangle PQD \sim \triangle ABD: \quad \frac{x}{6} = \frac{n}{m+n} \quad ...(\beta)$

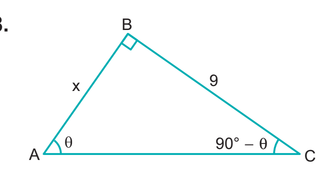
Sumando (α) y (β) tenemos:

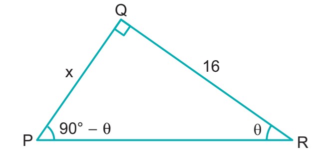
$\frac{x}{10} + \frac{x}{6} = \frac{n+m}{m+n} = 1 \Rightarrow \frac{16x}{60} = 1$

$\therefore x = 3,75$ m

Clave C

8.





De las figuras:

$\triangle ABC \sim \triangle RQP$:

$\frac{9}{x} = \frac{x}{16} \Rightarrow x^2 = 9(16)$

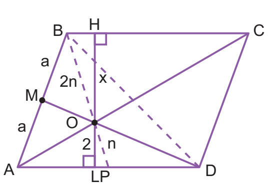
$x = 3(4)$

$x = 12$

Clave C

Resolución de problemas

9.

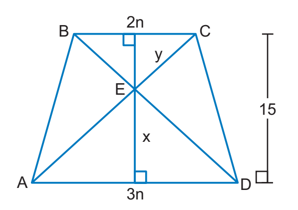


$\triangle BHO \sim \triangle POL$

$\frac{x}{2} = \frac{2n}{n} \Rightarrow x = 4$

Clave C

10. Del enunciado:



$\triangle BEC \sim \triangle AED$:

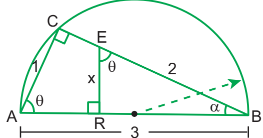
$\frac{2n}{3n} = \frac{y}{x} = \frac{15-x}{x} \Rightarrow 2x = 45 - 3x$

$5x = 45$

$\therefore x = 9$

Clave C

11.



$\triangle ACB \sim \triangle ERB$

$\frac{x}{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Clave D

Nivel 2 (página 70) Unidad 2

Comunicación matemática

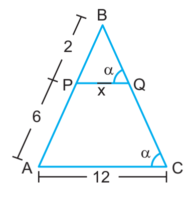
12.

13.

14.

Razonamiento y demostración

15.



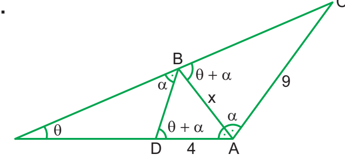
Del gráfico:

$\triangle PBQ \sim \triangle ABC$

$\frac{2}{8} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 3$

Clave E

16.



Del gráfico: $\triangle DBA \sim \triangle BCA$

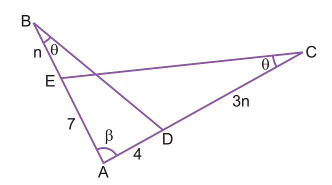
$$\Rightarrow \frac{BA}{DA} = \frac{CA}{BA} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x}$$

$$x^2 = 36$$

$$\therefore\ x = 6$$

Clave B

17.



Del gráfico: $\triangle BDA \sim \triangle CEA$

$$\Rightarrow \frac{DA}{BA} = \frac{EA}{AC} \Rightarrow \frac{4}{n+7} = \frac{7}{4+3n}$$

$$16 + 12n = 7n + 49$$

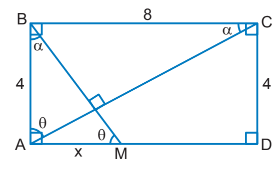
$$5n = 33$$

$$\Rightarrow n = 6{,}6$$

$\therefore\ BE = n = 6{,}6$

Clave D

18.



En el $\triangle ABC$: $\alpha + \theta = 90°$

Luego: $\triangle MAB \sim \triangle ABC$

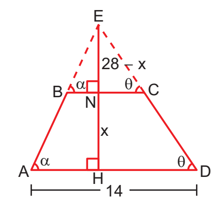
$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\therefore\ x = 2$$

Clave B

Resolución de problemas

19.



Por dato: ABCD es un trapecio y BC = 5

Del gráfico: $\triangle BEC \sim \triangle AED$

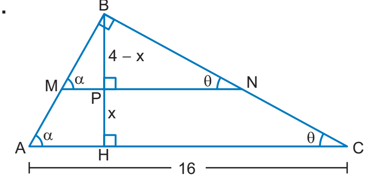
$$\Rightarrow \frac{EN}{BC} = \frac{EH}{AD} \Rightarrow \frac{28-x}{5} = \frac{28}{14}$$

$$28 - x = 10$$

$$\therefore\ x = 18$$

Clave A

20.



Por dato: $\overline{MN} \,//\, \overline{AC}$ y MN = 4

Luego: $\triangle MBN \sim \triangle ABC$

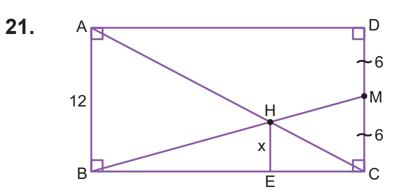
$$\Rightarrow \frac{MN}{BP} = \frac{AC}{BM} \Rightarrow \frac{4}{4-x} = \frac{16}{4}$$

$$1 = 4 - x$$

$$\therefore\ x = 3$$

Clave B

21.



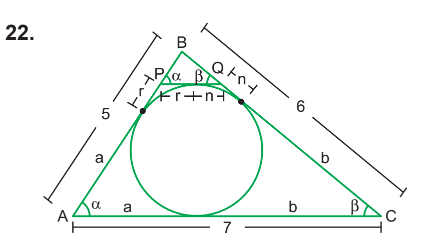
Por propiedad:

$$x = \frac{(12)(6)}{12+6} = \frac{72}{18} = 4$$

$\therefore\ x = 4$

Clave A

22.



Del gráfico tenemos:

$\triangle PBQ \sim \triangle ABC$

$$\frac{6-b-n}{6} = \frac{5-a-r}{5} = \frac{x}{7}$$

$$b + n = 6 - \frac{6}{7}x \quad \wedge \quad a + r = 5 - \frac{5}{7}x$$

Además, sabemos que:

$$\begin{aligned} PQ &= r + n = x \\ AC &= a + b = 7 \\ \hline a + r &+ b + n = 7 + x \end{aligned} \quad (+)$$

Luego:

$$5 - \frac{5}{7}x + 6 - \frac{6}{7}x = 7 + x$$

$$x = \frac{28}{18}$$

$$\therefore\ x = 1{,}55$$

Clave C

Nivel 3 (página 70) Unidad 2

Comunicación matemática

23. Cada uno de los triángulos en el gráfico tiene 2 cm de base por 2 cm de altura.

$$\Rightarrow A_{\triangle} = \frac{1}{2}x^2 \qquad ...(I)$$

$3A_{\triangle} = 54\ cm^2$; reemplazando de (I)

$$3\left(\frac{1}{2}x^2\right) = 54\ cm^2 \Rightarrow x = 6cm$$

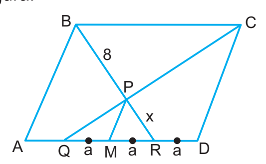
Clave C

24.

25.

Razonamiento y demostración

26. De la figura:



$\triangle ABR \sim \triangle MPR$:

$$\frac{8+x}{x} = \frac{AB}{PM} \qquad ...(1)$$

$\triangle CDQ \sim \triangle PMQ$:

$$\frac{CD}{PM} = \frac{3a}{a} \Rightarrow \frac{AB}{PM} = 3 \qquad ...(2)$$

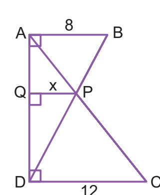
De (1) y (2):

$$\frac{8+x}{x} = 3 \Rightarrow 8 + x = 3x$$

$$8 = 2x \Rightarrow x = 4$$

Clave E

27. De la figura:



Por propiedad:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

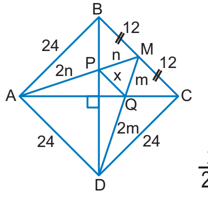
$$\frac{1}{x} = \frac{8+12}{8(12)} = \frac{20}{96}$$

$$\Rightarrow x = \frac{96}{20}$$

$\therefore\ x = 4{,}8$

Clave A

28. De acuerdo con la figura:



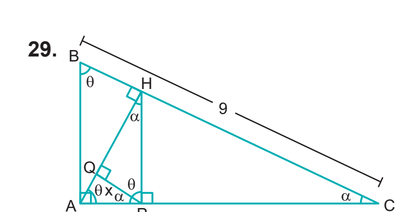
$\triangle AMD \sim \triangle PMQ$

$$\frac{x}{24} = \frac{n}{3n} \Rightarrow x = \frac{24n}{3n}$$

$$\therefore\ x = 8$$

Clave B

29.



Por dato: AH = 3 ∧ BC = 9

En el ◺ BAC: $\alpha + \theta = 90°$

Luego: ◺ APH ~ ◺ BAC

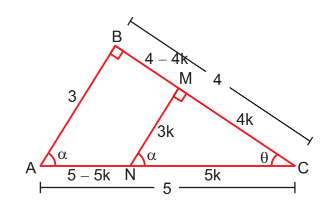
$$\frac{QP}{AH} = \frac{AH}{BC} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{9}$$

$\therefore\ x = 1$

Clave A

Resolución de problemas

30.



Del gráfico: ◺ABC ~ ◺NMC

Por el teorema de Pitágoras: AC = 5

Por dato:

Perímetro ◺NMC = Perímetro ⏢BMNA

$12k = 12 - 6k$

$18k = 12$

$\Rightarrow k = \frac{2}{3}$

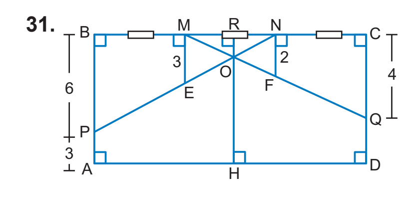
Piden:

$MN = 3k = 3\left(\frac{2}{3}\right)$

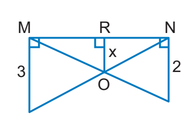
$\therefore\ MN = 2$

Clave E

31.



Del gráfico tenemos:



$$\Rightarrow x = \frac{3(2)}{3+2}$$

$x = 1,2$

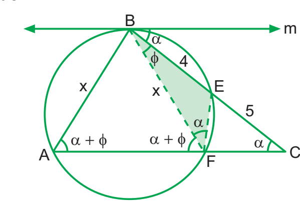
Luego:

OH = CD – RO = 9 – 1,2 = 7,8

$\therefore$ OH = 7,8 m

Clave D

32. Piden: AB = x



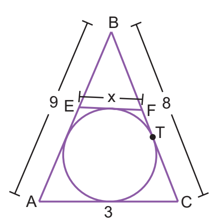
Del gráfico:

△BFC ~ △BEF

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = 6$$

Clave B

33.



Del gráfico:

Piden: EF = x

- $p_{\triangle ABC} = 10$
- △ EBF ~ △ ABC

$$\frac{EF}{AC} = \frac{p_{\triangle BEF}}{p_{\triangle ABC}} \quad ...(1)$$

Donde p: semiperímetro

Además, por propiedad:

$BT = p_{\triangle ABC} - AC$

BT = 10 – 3 = 7

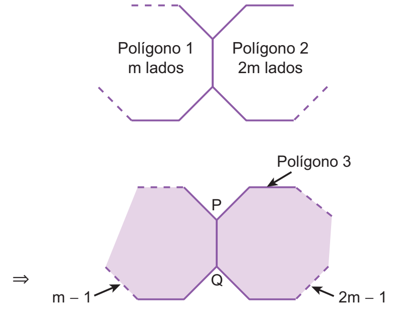
Pero BT tiene igual medida que el $p_{\triangle EBF}$, entonces reemplazando en (1):

$$\frac{EF}{3} = \frac{7}{10} \Rightarrow EF = 2,1$$

Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 72) Unidad 2

1.



De la gráfica:

$$\left(\begin{matrix}\text{Lados}\\ \text{polígonos 1}\end{matrix} - 1\right) + \left(\begin{matrix}\text{Lados}\\ \text{polígonos 2}\end{matrix} - 1\right) = \begin{matrix}\text{Lados}\\ \text{polígonos 3}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}\text{Lados del}\\ \text{polígono 3}\end{matrix} = m - 1 + 2m - 1 = 3m - 2$$

Del los datos: #D = 152

$$\frac{(3m-2)(3m-2-3)}{2} = 152$$

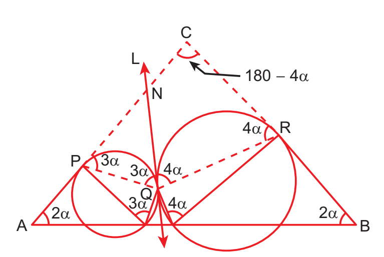
$(3m - 2)(3m - 5) = 304 \Rightarrow m = 7$

Nos piden: #D polígono 1

$$\#D_1 = \frac{m(m-3)}{2} = \frac{7(7-3)}{2} = 14$$

Clave B

2.



Prolongamos $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ hasta C:

$\Rightarrow m\angle ACB = 180° - 4\alpha$

Trazamos $\overleftrightarrow{L}$ tangente en Q:

$m\angle CPQ = m\angle PQN$ y $m\angle RQN = m\angle QRC$

Por ángulos inscritos y semiinscrito:

$m\overset{\frown}{PQ} = 3\alpha$ y $m\overset{\frown}{QR} = 4\alpha$

$\Rightarrow m\angle CPQ = mPQN = 3\alpha$

$\Rightarrow m\angle RQN = m\angle QRC = 4\alpha$

Del polígono PQRC:

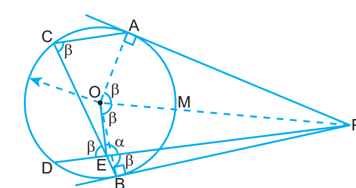
$3\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 4\alpha + 180° - 4\alpha = 360°$

$10\alpha = 180°$

$\alpha = 18°$

Clave A

3.



Sea la $m\angle ACB = \beta$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AMB} = 2\beta$; $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB} = \beta$ y $m\angle AOP = m\angle BOP = \beta$

Del dato $\overline{AC}$ // $\overline{DP}$:

$\Rightarrow m\angle DEC = \beta$ y por ángulos correspondientes la $m\angle PEB = \beta$

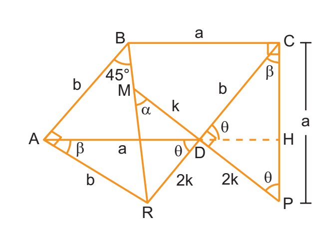
El ⏢BEOP es inscriptible (lados opuestos determinan ángulos del igual medida).

$\Rightarrow m\angle OEP = m\angle OBP = 90°$

$\therefore \alpha = 90°$

Clave B

4.





De los datos:
AD = BC = CP = a y AB = DC = AR = b
DM = k $\Rightarrow$ PD = 2k

De la gráfica:
$m\angle DAR = m\angle DCP = \beta$

Por congruencia (Δ RAD $\cong$ Δ PCD) (L-A-L):
DP = RD = 2k y $m\angle ADR = m\angle CDH = \theta$

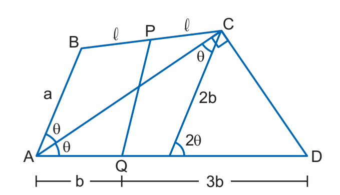
Se prolonga $\overline{AD}$ hasta H:
$\Rightarrow m\angle CDP = m\angle RDM = 90°$

Del ◺RDM $\left(\text{notable } \frac{53°}{2} \text{ y } \frac{127°}{2}\right)$:

$\therefore \alpha = \frac{127°}{2}$

Clave D

5.



Dando valores:
Si AQ = b $\Rightarrow$ QD = 3b; AB = a
BP = PC = ℓ

Se traza la mediana $\overline{CR}$ del ◺ ACD:
$\Rightarrow$ CR = 2b y $m\angle CRD = 2\theta$

De la gráfica:
$\overline{AB} \,//\, \overline{RC}$ y AQ = QR = b $\Rightarrow$ $\overline{PQ}$ es base media del trapecio ABCR.

$PQ = \frac{a + 2b}{2}$

De los datos:
AD + 2AB = 18

$4b + 2a = 18 \Rightarrow \frac{2b + a}{2} = 4{,}5$

$\therefore\ PQ = \frac{a + 2b}{2} = 4{,}5$

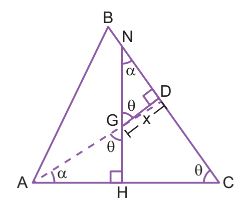
Clave C

6. De los datos:

$\frac{HC}{NH} = \frac{GH}{AH}$ ... (α)

Por semejanza
$\Delta NDG \sim \Delta NHC$:

$\frac{x}{HC} = \frac{ND}{NH} \Rightarrow \frac{x}{ND} = \frac{HC}{NH}$ ... (β)

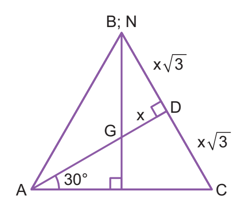


De (α) y (β):

$\frac{x}{NO} = \frac{GH}{AH} \Rightarrow$ los ◺ NDE y ◺ AHG son semejantes

$\Rightarrow$ A; G y D son lineales; esto demuestra que G es mediana y ortocentro.

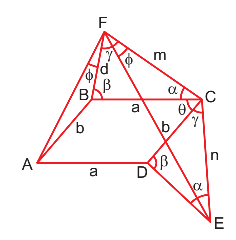
$\therefore$ El nuevo triángulo será equilátero:



Del dato:
ND . BC = 96
$x\sqrt{3}\ .\ 2x\sqrt{3} = 96$
x = 4

Clave B

7.



Del enunciado: $\Delta BFC \sim \Delta DCE \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \frac{m}{n}$

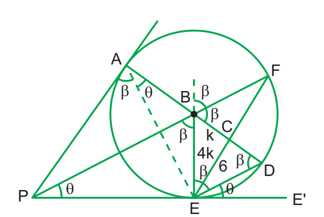
De la gráfica: $m\angle ABF = m\angle ECF$

$\Rightarrow \Delta ABF \sim \Delta ECF$ y $m\angle AFB = m\angle EFC = \phi$

$\therefore \frac{m\angle BFC}{m\angle AFE} = \frac{\gamma}{\phi + \gamma - \phi} = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$

Clave B

8.



De los datos: $\overline{PF} \,//\, \overline{ED}$
$m\angle FPE = m\angle DEE' = \theta$
$m\angle PBE = m\angle BED = \beta$

Por ángulo inscrito:
$m\angle EAD = \theta$

El ▱ABEP (lados opuestos determinan ángulos de igual medida) es inscriptible:
$\Rightarrow m\angle PAE = m\angle PBE = \beta$
$\Rightarrow m\overset{\frown}{AE} = 2\theta \Rightarrow m\angle ADE = \beta$

Del ΔEBD isósceles:
EB = 4k = BC + CD $\Rightarrow$ CD = 3k

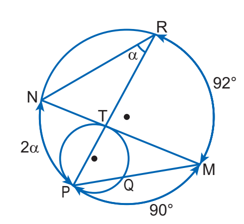
Por el teorema de Thales:

$\frac{CF}{EC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{CF}{6} = \frac{k}{3k}$

$\therefore$ CF = 2

Clave D

9.



Por propiedad de dos rectas paralelas:
$m\overset{\frown}{NR} = m\overset{\frown}{RM}$

Si, $m\overset{\frown}{TQ} = 92°$, en la circunferencia mayor:

$m\overset{\frown}{RM} = 92 \Rightarrow m\overset{\frown}{NR} = 92°$

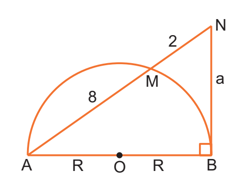
Por ángulo inscrito en la circunferencia mayor:
$m\overset{\frown}{PN} = 2\alpha$

$\therefore\ m\overset{\frown}{NR} + m\overset{\frown}{RM} + m\overset{\frown}{PM} + m\overset{\frown}{PN} = 360°$
$92° + 92° + 90° + 2\alpha = 360°$
$\alpha = 43°$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 75) Unidad 3

1.



$\overline{BN} \perp \overline{OB}$

Por el teorema de la tangente:

$a^2 = 2(2 + 8) \Rightarrow a^2 = 20$

$a = 2\sqrt{5}$

En el $\triangle$ABN:

$10^2 = a^2 + (2R)^2$

$100 = (2\sqrt{5})^2 + 4R^2$

$100 = 20 + 4R^2$

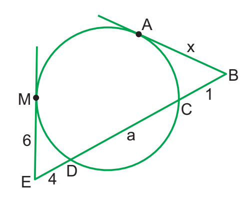
$4R^2 = 80$

$R^2 = 20$

$\therefore R = 2\sqrt{5}$

Clave D

2.



Por el teorema de la tangente:

$6^2 = 4(4 + a)$ ... (1)

$x^2 = 1(1 + a)$ ... (2)

De (1):

$36 = 16 + 4a$

$20 = 4a \Rightarrow a = 5$

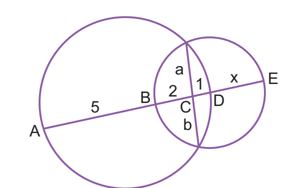
Reemplazando el valor de a en (2):

$x^2 = 1(1 + 5) = 6$

$\therefore x = \sqrt{6}$

Clave D

3.



Por el teorema de las cuerdas:

$a \cdot b = 7 \cdot 1 = 7$ ... (1)

$a \cdot b = 2(1 + x)$ ... (2)

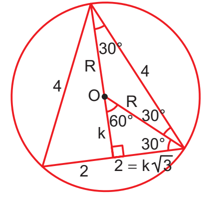
Reemplazando (1) en (2):

$7 = 2(1 + x) = 2 + 2x \Rightarrow 5 = 2x$

$\therefore x = 2,5$

Clave B

4.



Del gráfico: $R = 2k$

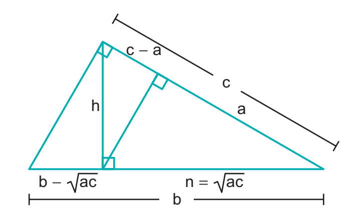
$k\sqrt{3} = 2$

$k = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore R = 2k = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Clave C

5.



$n^2 = ca$

$n = \sqrt{ac}$

$h^2 = (b - \sqrt{ac})(\sqrt{ac})$

Además:

$h^2 = c(c - a)$

$\Rightarrow (b - \sqrt{ac})(\sqrt{ac}) = c(c - a)$

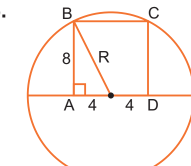
$b\sqrt{ac} - ac = c^2 - ac$

$b^2ac = c^4$

$b^2a = c^3$

Clave A

6.

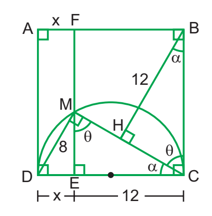


$R^2 = 8^2 + 4^2$

$R = 4\sqrt{5}$ m

Clave A

7.



$\triangle$CHB $\cong$ $\triangle$MEC

$\Rightarrow$ EC = 12

En el $\triangle$DMC:

$8^2 = (12 + x)x$

$64 = 12x + x^2$

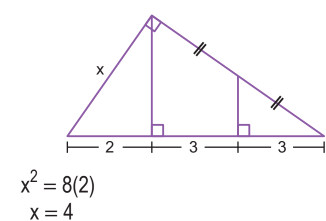
$0 = x^2 + 12x - 64$

$0 = (x - 4)(x + 16)$

$\therefore x = 4$

Clave C

8.

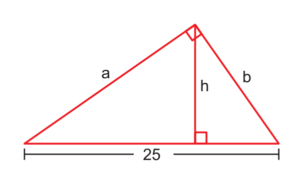


$x^2 = 8(2)$

$x = 4$

Clave D

9.



$a + b + h = 47$

$\Rightarrow a + b = 47 - h$ ... (1)

Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 25^2$

Además:

$ab = 25h$

Elevando (1) al cuadrado:

$a^2 + b^2 + 2ab = (47 - h)^2$

$25^2 + 2(25h) = (47 - h)^2$

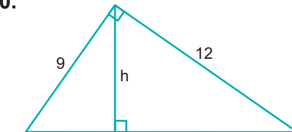
$0 = h^2 - 144h + 584$

$0 = (h - 132)(h - 12)$

$\Rightarrow h = 12$ cm

Clave A

10.

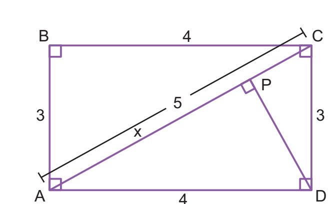


$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} = \frac{144 + 81}{9^2 \cdot 12^2} = \frac{225}{9^2 . 12^2}$

$h = \sqrt{\frac{9^2 \cdot 12^2}{225}} = \frac{9 \cdot 12}{15} \Rightarrow h = 7,2$

Clave B

11.



$(AC)^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$

Luego:

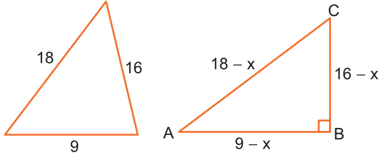
$(AD)^2 = AP . AC$

$4^2 = x . 5 \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

$\therefore x = 3,2$

Clave A

12.



Por teorema de Pitágoras en el $\triangle$ABC:

$(18 - x)^2 = (16 - x)^2 + (9 - x)^2$

$\Rightarrow x = 1 \wedge x = 13$

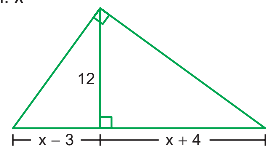
Del $\triangle$ ABC: $9 - x > 0 \Rightarrow x < 9$

$\therefore x = 1$

Clave A



13. Piden: x



Por propiedad:

$(12)^2 = (x-3)(x+4)$

$144 = x^2 + x - 12$

$\Rightarrow x^2 + x - 156 = 0$

$x \quad -12$

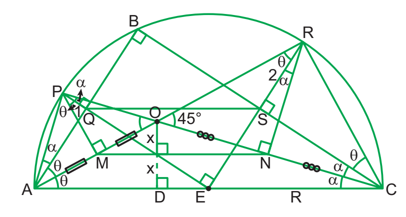
$x \quad +13$

$\Rightarrow x = 12 \quad \vee \quad x = -13$

$\therefore x = 12$ (no cumple)

Clave A

14.



Sabemos que $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ son sagitas $\Rightarrow$ AP = PB y BR = RC.

Luego: $\overset{\frown}{PR} = 90°$ y los triángulos APO y ORC son notables de 45° además M y N son puntos medios de $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$ $\Rightarrow$ OD = 2x

Además, Q y S son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

$\Rightarrow QS = \dfrac{AC}{2} = R$

En el triángulo QES:

$(QS)^2 = (ES)^2 + (QE)^2 \Rightarrow (R-2)^2 + (R-1)^2 = R^2$

$R^2 - 4R + 4 + R^2 - 2R + 1 = R^2$

$R^2 - 6R + 5 = 0 \quad \therefore R = 5$

Se tiene:

$AB = 2(QB) = 2(ES) \Rightarrow AB = 2(R-2)$

$AB = 2(5-2) = 6$

También:

$BC = 2(BS) = 2(QE) \Rightarrow BC = 2(R-1)$

$BC = 2(5-1) = 8$

Luego, el punto O es incentro del ⊿ABC:

$\Rightarrow AB + BC = AC + 2(OD)$

$6 + 8 = 2(5) + 2(2x)$

$14 - 10 = 4x \Rightarrow x = 1$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 77) Unidad 3

Comunicación matemática

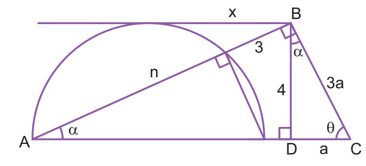
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Teorema de la tangente:

$x^2 = 3(n+3)$

El ⊿CBA ~ ⊿CDB

$\Rightarrow \dfrac{n+3}{3a} = \dfrac{4}{a}$

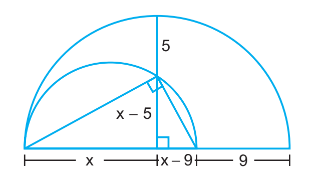
$\Rightarrow n = 9$

Luego:

$x^2 = 3(9+3) \Rightarrow x = 6$

Clave B

5.



En la semicircunferencia menor, por propiedad:

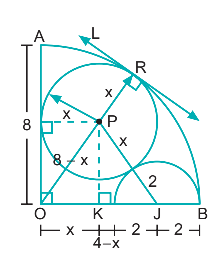
$(x-5)^2 = x(x-9)$

$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 9x$

$\therefore x = 25$

Clave B

6.



$\overline{PR} \perp \overleftrightarrow{L}$
$\overline{OR} \perp \overleftrightarrow{L}$ O; P y R son colineales

$\Rightarrow OP = 8 - x$

En el ΔOPJ:

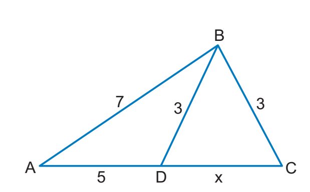
$(8-x)^2 - x^2 = (x+2)^2 - (6-x)^2$

$96 = 32x$

$\therefore x = 3$

Clave C

7.



En el ΔABC por el teorema de Stewart:

$7^2 \cdot x + 3^2 \cdot 5 = 3^2 \cdot (5+x) + 5 \cdot x \cdot (5+x)$

$49x + 45 = 45 + 9x + 25x + 5x^2$

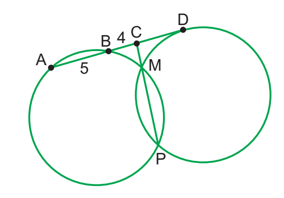
$15x = 5x^2$

$15 = 5x$

$\therefore x = 3$

Clave C

8.



$4(9) = PC(MC)$

$(CD)^2 = PC(MC)$

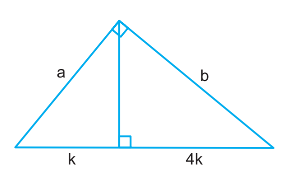
$(CD)^2 = 4(9)$

$CD = 6$

Clave C

Resolución de problemas

9.



$a^2 = 5k^2$

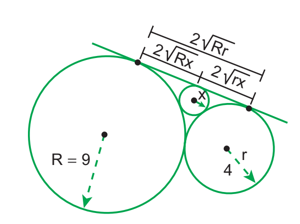
$b^2 = 20k^2$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{2}$

Clave A

10.



$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}$

$2\sqrt{x}\left(\sqrt{9} + \sqrt{4}\right) = 2\sqrt{9(4)}$

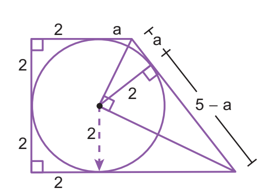
$\sqrt{x}(3+2) = 6$

$\sqrt{x} = \dfrac{6}{5}$

$x = \dfrac{36}{25} = 1{,}44$ m

Clave B

11.



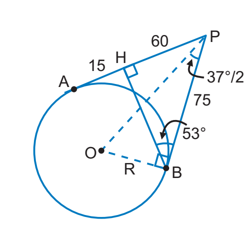
$a(5-a) = 2^2$

$a = 1$

$\therefore$ La base menor: 2 + 1 = 3

Clave C

12.

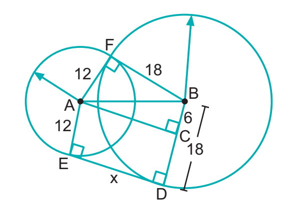


En el ⊿PBO: m∠OPB = 37°/2

$\therefore R = \dfrac{75}{3} = 25$

Clave B

13. 

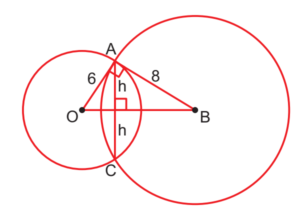


En el ◺AFB:
$(AB)^2 = 12^2 + 18^2 = 468$

En el ◿ACB:
$x^2 = (AB)^2 - 6^2 = 468 - 36 = 432$
$\therefore x = 12\sqrt{3}$ cm

Clave B

14.



Como las circunferencias son ortogonales, entonces: $\overline{OA} \perp \overline{AB}$
En el ◺OAB:
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} \Rightarrow h = 4{,}8$
$\therefore AC = 2h = 9{,}6$ cm

Clave A

Nivel 2 (página 78) Unidad 3

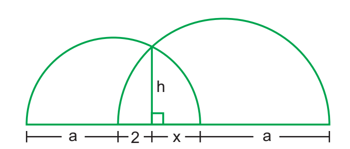
Comunicación matemática

15.

16.

Razonamiento y demostración

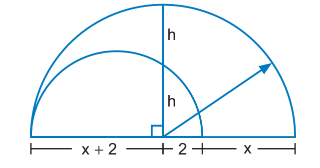
17.



En la semicircunferencia izquierda:
$h^2 = x(a + 2)$ ... (1)
En la semicircunferencia derecha:
$h^2 = 2(x + a)$ ... (2)
De (1) y (2):
$ax + 2x = 2x + 2a$
$\therefore x = 2$

Clave B

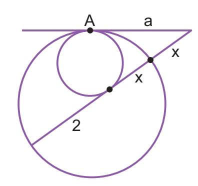
18.



En la semicircunferencia menor:
$h^2 = 2(x + 2)$ ...(1)
En la semicircunferencia mayor:
$(2h)^2 = (x + 2)(x + 2)$
$\Rightarrow h = \frac{x+2}{2}$ ...(2)
De (1) y (2):
$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 2(x + 2)$
$x + 2 = 8 \Rightarrow x = 6$

Clave A

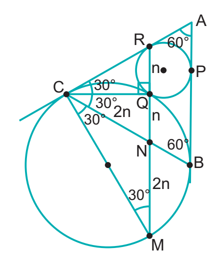
19.



En la circunferencia mayor, por el teorema de la tangente:
$a^2 = x(2x + 2)$
En la circunferencia menor:
$a = 2x$
Luego:
$(2x)^2 = x(2x + 2)$
$4x^2 = x(2x + 2)$
$4x = 2x + 2$
$\therefore x = 1$

Clave A

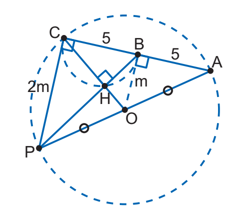
20.



Trazamos $\overline{CQ} \perp \overline{RN}$
$\therefore$ El $\triangle$CQN es notable de 30° y 60°
$\Rightarrow$ CN = NM = 2n
Luego:
$(CN)(BN) = (QN)(NM)$
$(BN)(CN) = (n)(2n)$
$(BN)(CN) = 2n^2$

Clave E

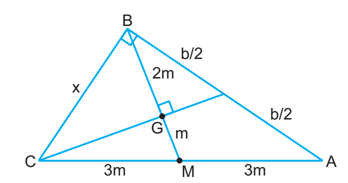
21.



Del gráfico:
◺PHC ~ ◺BHO
$\Rightarrow$ HP = 2(BH)
Además:
$(BH)(PB) = 5^2$
$\left(\frac{HP}{2}\right)(PB) = 25$
Pero: $(HP)(PB) = (CP)^2$; reemplazando:
$(CP)^2 = 2 \times 25 \Rightarrow CP = 5\sqrt{2}$ cm

Clave D

22.

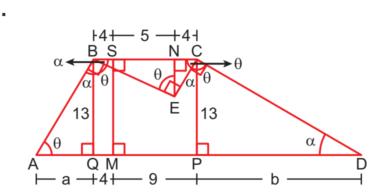


El punto G es baricentro del $\triangle$ABC. Sea GM = m;
BG = 2m y CM = MA = 3m
En el $\triangle$ABC: $x^2 + b^2 = (6m)^2$
$x^2 + b^2 = 36m^2$ ... (1)
En el $\triangle$CBM: $\frac{1}{(2m)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(b/2)^2}$
$\Rightarrow \frac{1}{4m^2} = \frac{b^2 + 4x^2}{x^2b^2}$ ... (2)
Reemplazamos (2) en (1):
$9x^2b^2 = (b^2 + 4x^2)(x^2 + b^2)$
$\Rightarrow 9x^2b^2 = b^4 + 5x^2b^2 + 4x^4$
$0 = 4x^2 - 4x^2b^2 + b^4$
$0 = (2x^2 - b^2)^2$
$\Rightarrow 2x^2 = b^2 \Rightarrow x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Clave A

Resolución de problemas

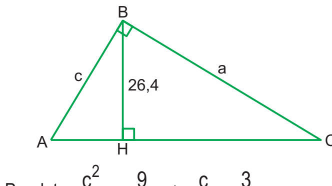
23.



En el ◺BEC:
$(NE)^2 = 9(4) \Rightarrow NE = 6$
Además:
◺BEN ~ ◺BQA ~ ◺DPC
$\Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{a}{13} = \frac{13}{b}$
$a = \frac{26}{3} \wedge b = \frac{39}{2}$
$\Rightarrow AM = \frac{38}{3} \wedge MD = \frac{57}{2}$
$\therefore (AM)(MD) = 361$

Clave D

24.



Por dato: $\frac{c^2}{a^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$
$\Rightarrow c = 3k \wedge a = 4k$



En el ⊿ ABC, se cumple:

$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(26,4)^2} \Rightarrow \frac{1}{9k^2} + \frac{1}{16k^2} = \frac{25}{17\,424}$

Reduciendo: $k^2 = 121$

$\Rightarrow k = 11$

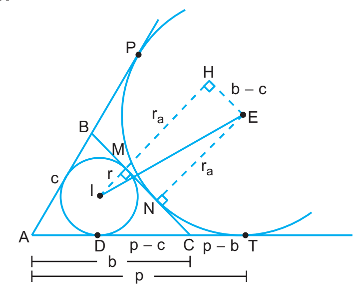
Piden:

$a + c = 4k + 3k = 7k = 7(11)$

$\therefore a + c = 77$

Clave D

25.



Por dato: $AC - AB = 5 \wedge r + r_a = 12$

$\Rightarrow b - c = 5$

Por propiedad: $AT = p \wedge DC = p - c$, donde p es el semiperímetro del ΔABC.

$\Rightarrow CT = p - b$

Del gráfico: DC = MC, NC = CT y MN = HE

Además: MN + NC = MC

$\Rightarrow MN + CT = DC$

$MN + (p - b) = p - c \Rightarrow MN = b - c$

$\Rightarrow HE = b - c$

En el ⊿ IHE por el teorema de Pitágoras:

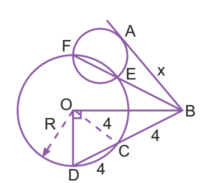
$(IE)^2 = (r + r_a)^2 + (b - c)^2$

$\Rightarrow (IE)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore IE = 13$

Clave D

26.



$x^2 = (FB)(EB)$

Además:

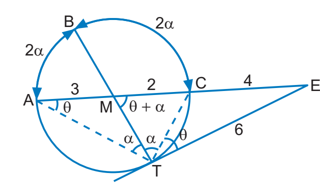
$(FB)(EB) = 8(4)$

$\Rightarrow x^2 = 4(8)$

$x = 4\sqrt{2}$

Clave C

27.



En el ΔATE:

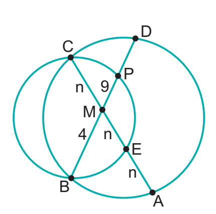
$6^2 = 4(EA)$

$9 = EA$

$\therefore (BM)(MT) = 3(2) = 6$

Clave B

28.



$n^2 = 4(9)$

$n = 6$

$4(DP + 9) = n(2n)$

$4(DP + 9) = 2(6^2)$

$DP + 9 = 18$

$DP = 9$

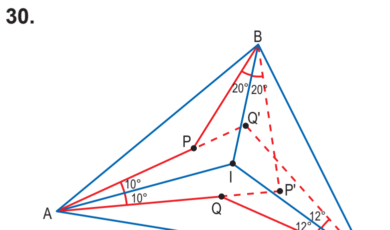
Clave E

Nivel 3 (página 79) Unidad 3

Comunicación matemática

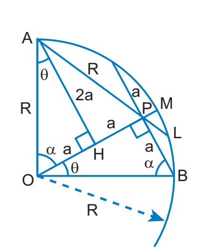
29.

30.



Razonamiento y demostración

31.



⊿AHO ≅ ⊿OPB

$\Rightarrow PB = a$

$\theta = \frac{53°}{2}$

$\Rightarrow OB = R = a\sqrt{5}$

Teorema de las cuerdas:

$a(a) = 3R$

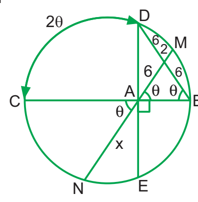
$\Rightarrow \left(\frac{R}{\sqrt{5}}\right)^2 = 3R$

$\frac{R^2}{5} = 3R$

$R = 15$

Clave E

32.



BD = 12

AM = 8

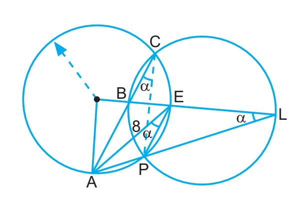
$(x + 6)2 = 6(6)$

$x + 6 = 18$

$x = 12$

Clave E

33.



En el ΔAEL:

$8^2 = (AP)(AL)$

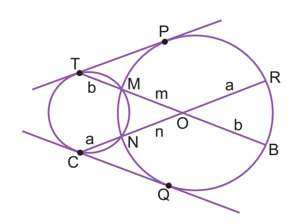
Por relaciones métricas:

$(AB)(AC) = (AL)(AP)$

$\therefore (AB)(AC) = 8^2 = 64$

Clave D

34.



$TM = OB \wedge CN = OR$

Teorema de la tangente:

$(TP)^2 = (m + 2b)b$

$(CQ)^2 = (n + 2a)a$

$(TP)^2 - (CQ)^2 = (m + 2b)b - (n + 2a)a$

$(TP)^2 - (CQ)^2 = 2(b^2 - a^2) + (mb - na)$ ...(1)

Teorema de las cuerdas:

$mb = na$

Por dato:

$(TM)^2 - (CN)^2 = 25$

$b^2 - a^2 = 25$

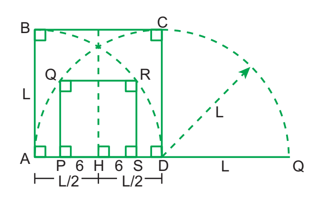
Reemplazando en (1):

$(TP)^2 - (CQ)^2 = 2(25) + (mb - mb)$

$(TP)^2 - (CQ)^2 = 50$

Clave E

35. Del gráfico:



$(PQ)^2 = (AP)(PQ)$

$(12)^2 = \left(\frac{L}{2} - 6\right)\left(\frac{3L}{2} + 6\right)$

$\Rightarrow 144 = \frac{3}{4}(L - 12)(L + 4)$

$\Rightarrow 3 \times 4^3 = L^2 - 8L - (12)(4)$

$0 = L^2 - 8L - (12)(20)$

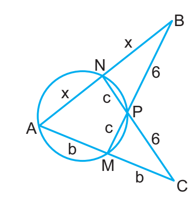
$0 = (L + 12)(L - 20)$

$\therefore L = 20$

Clave E

Resolución de problemas

36.



Teorema de Menelao:

$(b)(6)(x) = (b)(c)(2x)$

$3 = c$

$x(BP)b = (x)(c)(2b)$

$BP = 2c$

$BP = 6$

Teorema de las secantes:

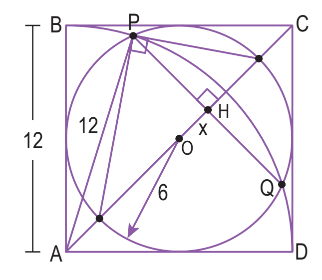
$x(2x) = 6(6 + c)$

$2x^2 = 6(9)$

$x = 3\sqrt{3}$

Clave D

37.



En el gráfico

$(PH)^2 = (6 + x)(6 - x)$

$(PH)^2 = 6^2 - x^2$ ... (I)

En el ◺AHP:

$(AH)^2 + (PH)^2 = (AP)^2$

Reemplazando: $(6\sqrt{2} + x)^2 + (6^2 - x^2) = 12^2$

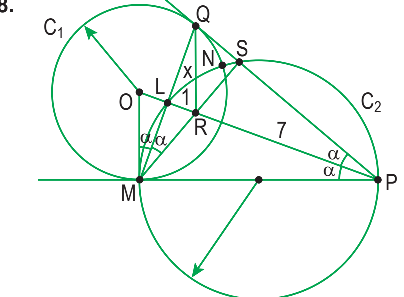
$6^2(2) + 12\sqrt{2}x + x^2 + 6^2 - x^2 = 12^2$

$12\sqrt{2}x = 6^2$

$\Rightarrow\ x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm

Clave C

38.



En el gráfico:

O, L y P son colineales

$\Rightarrow \overline{MP}$ es el diámetro de C_2:

Luego: $m\angle MLP = m\angle MSP = 90° \Rightarrow \Delta QRM$ y ΔRMO son isósceles

También: QR = RM = OM

En ΔOMP: $(OM)^2 = (OL)(OP)$

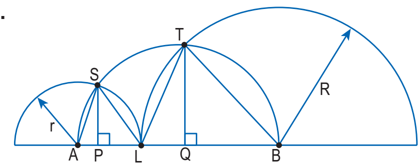
Dato: OL = LR = 1 y RP = 7

$\Rightarrow\ (OM)^2 = (1)(1 + 1 + 7) \Rightarrow OM = 3$

$\therefore\ QR = 3$

Clave E

39.



Del gráfico: $\overline{PL}$ y $\overline{LQ}$ son las proyecciones ortogonales de $\overline{SL}$ y $\overline{TL}$ sobre $\overline{AB}$

$\Rightarrow\ (SL)^2 = (PL)(2r)$ y $(TL)^2 = (LQ)(2R)$

Luego:

$$\left(\frac{TL}{SL}\right)^2 = \frac{(LQ)2R}{(PL)(2r)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{TL}{SL} = \sqrt{\frac{(LQ)R}{(PL)r}} \quad \text{... (1)}$$

Además:

$(AS)^2 = (AP)(AB)$

$r^2 = (r - PL)(R + r) \Rightarrow PL = \dfrac{Rr}{R + r}$ ... (2)

También: $(TB)^2 = (QB)(AB)$

$R^2 = (R - LQ)(R + r)\ \Rightarrow\ LQ = \dfrac{Rr}{R + r}$ ... (3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

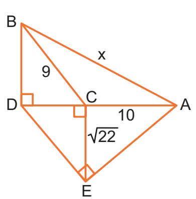
$$\frac{TS}{SL} = \sqrt{\frac{\left(\frac{Rr}{R+r}\right)R}{\left(\frac{Rr}{R+r}\right)r}} \quad \Rightarrow \quad \frac{TS}{SL} = \sqrt{\frac{R}{L}}$$

Clave A

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 81) Unidad 3

1.



$(DC)(10) = (\sqrt{22})^2$

$DC = 2,2$

Teorema de Euclides en el ΔBCA:

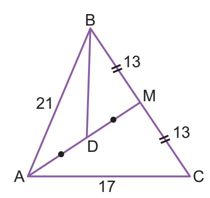
$x^2 = 9^2 + 10^2 + 2(10)(2,2)$

$x^2 = 225$

$x = 15$

Clave E

2.



Por el teorema de la mediana:

$21^2 + 17^2 = 2(AM)^2 + \dfrac{26^2}{2}$

$730 = 2(AM)^2 + 338$

$196 = (AM)^2 \Rightarrow AM = 14$

Luego, como $\overline{BD}$ es mediana:

$\Rightarrow 21^2 + 13^2 = 2x^2 + \dfrac{(AM)^2}{2}$

$610 = 2x^2 + \dfrac{14^2}{2}$

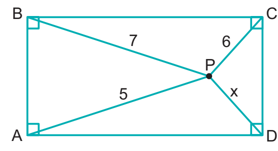
$610 = 2x^2 + 98$

$512 = 2x^2 \Rightarrow 256 = x^2$

$\therefore x = 16$

Clave E

3.



Por el teorema de Marlen:

(1.^{er} caso)

$7^2 + x^2 = 5^2 + 6^2$

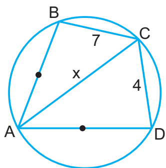
$49 + x^2 = 25 + 36$

$x^2 = 61 - 49 = 12$

$\therefore x = 2\sqrt{3}$

Clave B

4.



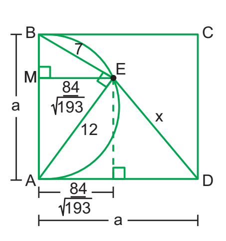
Por el teorema de Chadú:

$x = 7 + 4$

$\therefore x = 11$

Clave A

5.



En el ⊿AEB por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 7^2 + 12^2 \Rightarrow a = \sqrt{193}$

Por relaciones métricas en el ⊿AEB:

$ME = \dfrac{7 \times 12}{\sqrt{193}} = \dfrac{84}{\sqrt{193}}$

Por teorema de Euclides (1.^{er} caso) en el ΔAED:

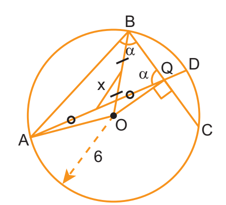
$x^2 = (12)^2 + a^2 - 2a\dfrac{84}{\sqrt{193}}$

$x^2 = 144 + 193 - 2\sqrt{193}\,\dfrac{84}{\sqrt{193}}$

$\therefore x = 13$

Clave C

6.



Por dato:

$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC} \Rightarrow m\angle ABQ = m\angle AQB = \alpha$

El ΔABQ es isósceles (AB = AQ).

En el □ABQO (T. de Euler):

$AO^2 + AB^2 + BQ^2 + OQ^2 = AQ^2 + OB^2 + 4x^2$

$AO^2 + AB^2 + OB^2 = AB^2 + OB^2 + 4x^2$

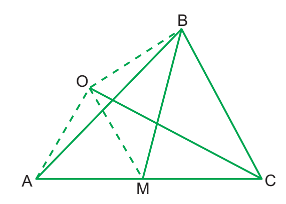
$AO^2 = 4x^2$

$6^2 = 4x^2$

$\therefore x = 3$

Clave A

7.



Del gráfico; O es circuncentro:

AO = OM = OB = 5

En el ΔAOC (T. de la mediana):

$AO^2 + OC^2 = 2OM^2 + \dfrac{(AC)^2}{2}$

$5^2 + 13^2 = 2(5)^2 + \dfrac{(AC)^2}{2}$

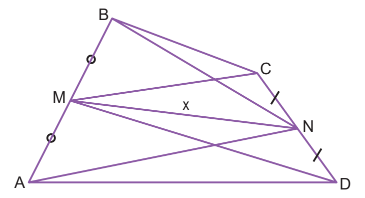
$25 + 169 = 50 + \dfrac{(AC)^2}{2}$

$144 = \dfrac{(AC)^2}{2}$

$\therefore AC = 12\sqrt{2}$ cm

Clave C

8.



En el ΔBNA (T. de la mediana):

$AN^2 + BN^2 = 2x^2 + \dfrac{(AB)^2}{2}$ ... (1)

En el ΔCMD (T. de la mediana):

$CM^2 + MD^2 = 2x^2 + \dfrac{(CD)^2}{2}$ ... (2)

Sumando (1) y (2):

$AN^2 + BN^2 + CM^2 + MD^2 = 4x^2 + \dfrac{AB^2 + CD^2}{2}$

$80 = 4x^2 + \dfrac{16}{2}$

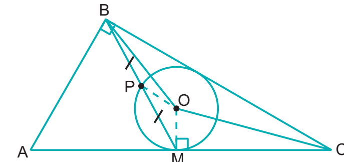
$72 = 4x^2$

$18 = x^2$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$ cm

Clave E

9.



Del gráfico:

$BM = \dfrac{AC}{2}$; $OM = OP$

En el ΔBOM (T. de la mediana):

$OB^2 + OM^2 = 2OP^2 + \dfrac{(BM)^2}{2}$

$OB^2 + OP^2 = 2OP^2 + \dfrac{(AC)^2}{8}$

$OB^2 = OP^2 + \dfrac{(AC)^2}{8}$ ... (1)

En el ⊿OMC (T. Pitágoras):

$OC^2 = OM^2 + MC^2$

$OC^2 = OP^2 + \dfrac{(AC)^2}{4}$ ... (2)

Restando (1) de (2):

$OC^2 - OB^2 = \dfrac{(AC)^2}{8}$

$36 = \dfrac{(AC)^2}{8}$

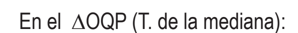
$\therefore AC = 12\sqrt{2}$

Clave B

10.

En el ΔAPQ (T. de la mediana):

$AQ^2 + AP^2 = 2(AR)^2 + \dfrac{(PQ)^2}{2}$ ... (1)



En el $\triangle OQP$ (T. de la mediana):

$OQ^2 + OP^2 = 2(OR)^2 + \dfrac{(PQ)^2}{2}$ ... (2)

(1) – (2):

$AQ^2 - OQ^2 + AP^2 - OP^2 = 2((AR)^2 - (OR)^2)$

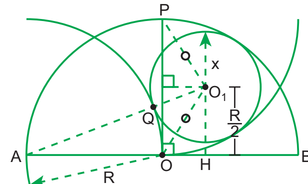
$R^2 + 6^2 - R^2 = 2(a^2 - b^2)$

$36 = 2(a^2 - b^2)$

$\therefore\ a^2 - b^2 = 18$

Clave B

11. 



Del gráfico:

$PO_1 = OO_1 = R - x;\ O_1H = \dfrac{R}{2};\ AO_1 = R + x$

En el $\triangle AO_1O$ (T. de Herón):

$O_1H = \dfrac{2}{AO}\sqrt{p(p - AO)(p - OO_1)(p - AO_1)}$ ... (1)

$p = \dfrac{AO_1 + OO_1 + AO}{2} = \dfrac{R + x + R - x + R}{2}$

$p = \dfrac{3R}{2}$

En (1)

$\dfrac{R}{2} = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{3R}{2}\left(\dfrac{3R}{2} - R\right)\left(\dfrac{3R}{2} - (R - x)\right)\left(\dfrac{3R}{2} - (R + x)\right)}$

$\dfrac{R^2}{2} = \sqrt{\left(\dfrac{3R}{2}\right)\left(\dfrac{R}{2}\right)\left(\dfrac{R}{2} + x\right)\left(\dfrac{R}{2} - x\right)}$

$\dfrac{R^2}{4} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3\left(\dfrac{R^2}{4} - x^2\right)}$

$\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = 3\left(\dfrac{R^2}{4} - x^2\right)$

$\dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4} - 3x^2$

$3x^2 = \dfrac{R^2}{2}$

$x = \dfrac{R\sqrt{6}}{6}$

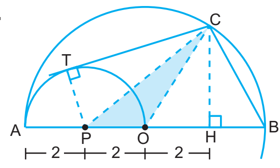
Por dato:

$AB = 2R = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \sqrt{6}$

$\therefore\ x = 1$

Clave C

12.



En el $\triangle POC$ (T. de Euclides):

$PC^2 = PO^2 + OC^2 + 2(PO)(OH)$

$PC^2 = 2^2 + 4^2 + 2(2)(2)$

$PC^2 = 28$

$PC = 2\sqrt{7}$

En el ⊿PTC (T. Pitágoras):

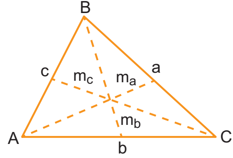
$PT^2 + TC^2 = PC^2$

$2^2 + TC^2 = (2\sqrt{7})^2$

$\therefore\ TC = 2\sqrt{6}$ m

Clave C

13.



Sean m_a, m_b y m_c medianas de los lados BC, AC y AB.

Por T. de la mediana:

$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2}$ ... (1)

$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2}$ ... (2)

$b^2 + c^2 = m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}$ ... (3)

(1) + (2) + (3):

$2(a^2+b^2+c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

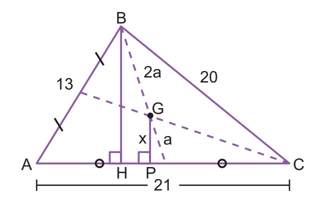
$(a^2 + b^2 + c^2)\dfrac{3}{4} = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$

$(48)\dfrac{3}{4} = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$

$\therefore\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 36\ cm^2$

Clave E

14.



Sea G baricentro.

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, del gráfico:

$\dfrac{PG}{BH} = \dfrac{a}{3a} \Rightarrow x = \dfrac{BH}{3}$ ... (1)

En el $\triangle ABC$ (T. de Herón):

$BH = \dfrac{2}{21}\sqrt{p(p - 21)(p - 20)(p - 13)}$

Donde:

$p = \dfrac{20 + 21 + 13}{2}$

$p = 27$

Luego:

$BH = \dfrac{2}{21}\sqrt{27(6)(7)(14)}$

$BH = 12$ ... (2)

Reemplazamos (2) en (1):

$x = \dfrac{12}{3}$ $\therefore\ x = 4$

Clave D

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 83) Unidad 3

Comunicación matemática

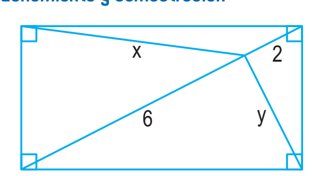
1.

2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



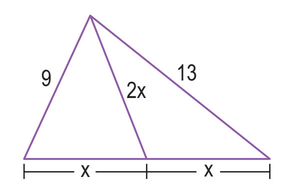
Por el teorema de Marlen (1.er caso):

$x^2 + y^2 = 6^2 + 2^2 = 36 + 4$

$\therefore x^2 + y^2 = 40$

Clave A

5.



$9^2 + 13^2 = 2(2x)^2 + \dfrac{(2x)^2}{2}$

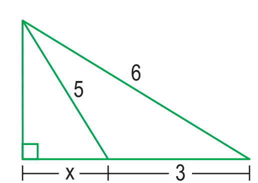
$250 = 8x^2 + 2x^2$

$250 = 10x^2$

$x = 5$

Clave B

6.



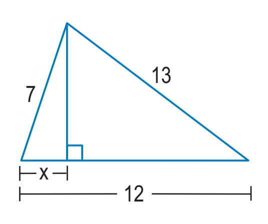
$6^2 = 5^2 + 3^2 + 2(3)(x)$

$2 = 6x$

$x = \dfrac{1}{3}$

Clave D

7.



$13^2 = 7^2 + 12^2 - 2(12)(x)$

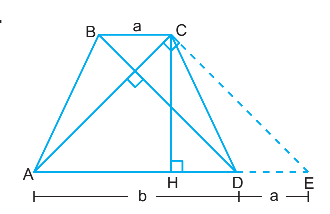
$24 = 24x$

$x = 1$

Clave A



8.



Por dato: ABCD es un trapecio

Además: $a + b = 10 \wedge AC \,.\, BD = 48$

Trazamos $\overline{CE} \,//\, \overline{BD}$, entonces se forma el paralelogramo BCED; con lo cual:

$BD = CE \wedge BC = DE$

En el ⊿ ACE por relaciones métricas:

$AC \,.\, CE = CH \,.\, AE$

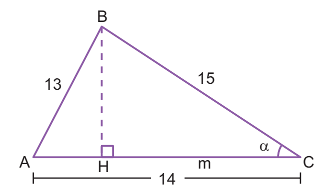
$AC \,.\, BD = CH \,.\, (a + b)$

$48 = CH \,.\, 10$

$\therefore\ CH = \dfrac{24}{5}$

Clave C

9.



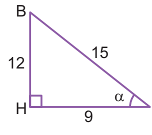
Por el primer teorema de Euclides:

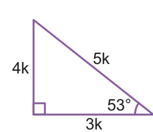
$13^2 = 15^2 + 14^2 - 2(14)m$

$28m = 252$

$\Rightarrow m = 9$

Luego, por el teorema de Pitágoras: BH = 12

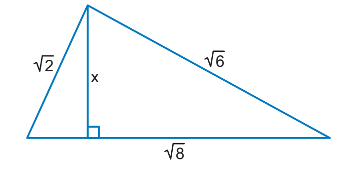




$\therefore \alpha = 53°$

Clave D

10.



Aplicando el teorema de Herón:

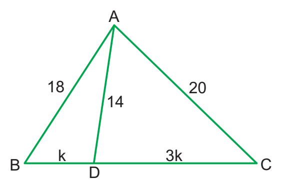
$x = \dfrac{2}{\sqrt{8}}\sqrt{p(p-\sqrt{2})(p-\sqrt{6})(p-\sqrt{8})}$

$p = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}{2}$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Clave D

11.



Teorema de Stewart:

$AB^2(DC) + AC^2(BD) = AD^2(BC) + BD(DC)BC$

Entonces:

$18^2(3k) + 20^2(k) = 14^2(4k) + (k)(3k)(4k)$

$972 + 400 = 784 + 12k^2$

$k^2 = 49 \Rightarrow k = 7$

$\therefore a = 4k = 28$

Clave C

Nivel 2 (página 84) Unidad 3

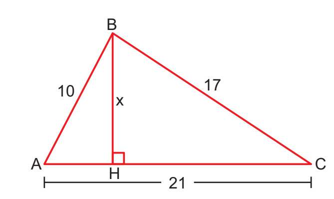
Comunicación matemática

12.

13.

Razonamiento y demostración

14.



Por el teorema de Herón:

$p = \dfrac{10 + 17 + 21}{2} = 24$

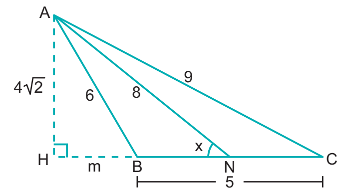
$x = \dfrac{2}{21}\sqrt{(24)(24-10)(24-17)(24-21)}$

$x = \dfrac{2}{21}\sqrt{7056} = \dfrac{2}{21}(84)$

$\therefore x = 8$

Clave A

15.



En el △ABC, por el segundo teorema de Euclides:

$9^2 = 6^2 + 5^2 + 2(5)(m)$

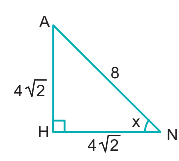
$10m = 20$

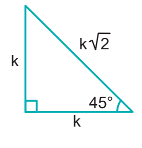
$\Rightarrow m = 2$

En el ⊿ AHB por el teorema de Pitágoras:

$AH = 4\sqrt{2}$

Luego:

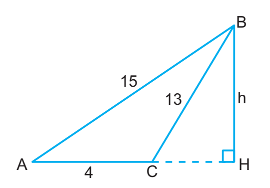




$\therefore x = 45°$

Clave D

16.



En el △ABC, BH = h es una altura.

Por el teorema de Herón:

$p = \dfrac{15 + 4 + 13}{2} = 16$

$\Rightarrow h = \dfrac{2}{4}\sqrt{(16)(16-15)(16-13)(16-4)}$

$h = \dfrac{2}{4}\sqrt{576} = \dfrac{2}{4}(24) = 12$

$\therefore\ h = 12$

Clave D

17. Aplicamos el teorema de Stewart en el △BAC:

- $(4)^2(1) + (3)^2(4) = AD^2(5) + (1)(4)(5)$

  $\Rightarrow 5AD^2 = 32$

- $(4)^2(3) + (3)^2(2) = AE^2(5) + (2)(3)(5)$

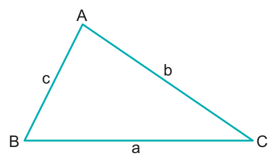
  $\Rightarrow 5AE^2 = 36$

$\therefore 5(AE^2 - AD^2) = 4$

Clave B

Resolución de problemas

18.



Ley de cosenos:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A$ ...(1)

Dato:

$2a^2 = b^2 + c^2 + (b + c)^2$

$2a^2 = 2b^2 + 2c^2 + 2bc$

$a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ...(2)

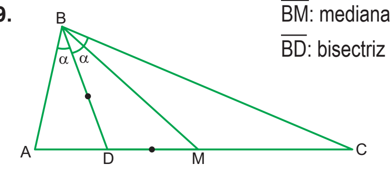
Igualando (1) y (2):

$b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A = b^2 + c^2 + bc$

$\cos A = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow A = 120°$

Clave D

19.



$\overline{BM}$: mediana

$\overline{BD}$: bisectriz

Por el teorema de la bisectriz interior:

$BD^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)$

De la figura: BD = DM

$\Rightarrow AD = AM - DM = \dfrac{AC}{2} - BD$

$DC = MC + DM = \dfrac{AC}{2} + BD$

Luego:

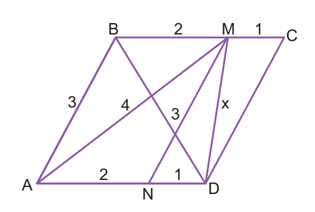
$BD^2 = 144 - \dfrac{AC^2}{4} + BD^2$

$AC^2 = 4 \,.\, 144 \Rightarrow AC = 24$

Clave E

20. Del enunciado, se tiene:





Teorema de Stewart en el △AMD:

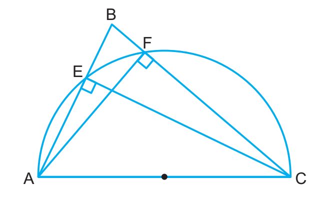
$2x^2 + 4^2 = (3)^2(3) + (1)(2)(3)$

$2x^2 + 16 = 33$

$x^2 = 8,5 \Rightarrow x = \sqrt{8,5}$

Clave B

21.



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB(AE)$ ...(1)

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC(FC)$ ...(2)

Sumando (1) y (2) tenemos:

$2(AB \, . \, AE + BC \, . \, FC) = 2AC^2$

Dato: $AB \, . \, AE + BC \, . \, FC = 36$

$\Rightarrow AC^2 = 36$

$\therefore AC = 6$

Clave D

Nivel 3 (página 85) Unidad 3

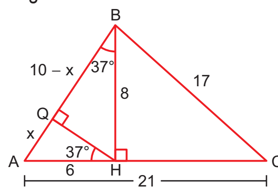
Comunicación matemática

22.

23.

Razonamiento y demostración

24. De la figura:



$BH = \frac{2}{21}\sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$

$BH = \frac{2}{21}\sqrt{24(14)(7)(3)}$

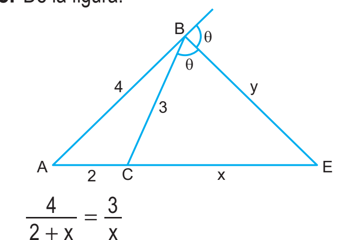
$BH = 8 \Rightarrow AH = 6$

En el ⊿AHB:

$\frac{x}{6} = \frac{6}{10} \Rightarrow x = \frac{36}{10} = 3,6$

Clave D

25. De la figura:



$\frac{4}{2+x} = \frac{3}{x}$

$4x = 6 + 3x$

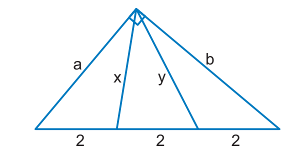
$x = 6$

$y^2 = (8)(6) - (4)(3) = 48 - 12$

$y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$

Clave A

26.



$a^2 + b^2 = 36$

$a^2 + y^2 = 2x^2 + 2(2^2)$

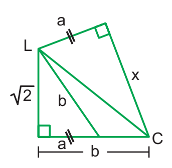
$b^2 + x^2 = 2y^2 + 2(2^2)$ (+)

$36 = x^2 + y^2 + 16$

$\therefore x^2 + y^2 = 20$

Clave B

27.



$a^2 + (\sqrt{2})^2 = b^2$

$\Rightarrow b^2 - a^2 = 2$

De la figura: $LC^2 = LC^2$

$(\sqrt{2})^2 + b^2 = a^2 + x^2$

$2 + 2 = x^2$

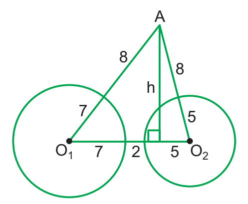
$4 = x^2$

$x = 2$

Clave E

Resolución de problemas

28.



Aplicando el teorema de Herón:

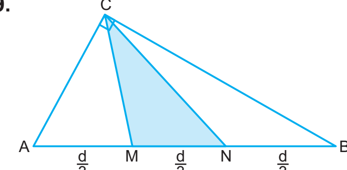
$h = \frac{2}{14}\sqrt{p(p-15)(p-13)(p-14)}$

Donde: $p = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21$

$\therefore h = \frac{1}{7}\sqrt{(21)(6)(8)(7)} = 12$

Clave C

29.



Teorema de la mediana ΔACN:

$AC^2 + CN^2 = 2CM^2 + \frac{2}{9}d^2$ ...(1)

Teorema de la mediana ΔMCB:

$CM^2 + CB^2 = 2CN^2 + \frac{2}{9}d^2$ ...(2)

Luego, sumamos (1) y (2):

$AC^2 + CB^2 = CM^2 + CN^2 + \frac{4}{9}d^2$

$d^2 = CM^2 + CN^2 + \frac{4d^2}{9}$

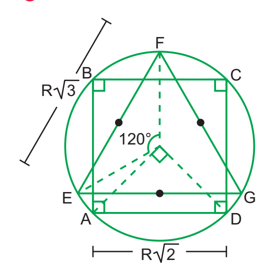
$\Rightarrow CM^2 + CN^2 = \frac{5d^2}{9}$

$\therefore CM^2 + CN^2 + MN^2 = \frac{2}{3}d^2$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 86) Unidad 3

1.

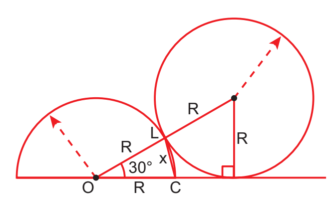


$2p_{EFG} = 3R\sqrt{3}$
$2p_{ABCD} = 4R\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2p_{EFG}}{2p_{ABCD}} = \dfrac{3R\sqrt{3}}{4R\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

Clave C

2.



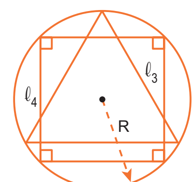
El ΔOLC es el triángulo elemental de un dodecágono regular, entonces:
$x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Clave D

3. Por teoría:
$\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
Pero:
$R = 4\sqrt{2+\sqrt{2}}$
Entonces:
$\ell_8 = \left(4\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$
$\ell_8 = 4\sqrt{4-2}$
$\ell_8 = 4\sqrt{2}$

Clave C

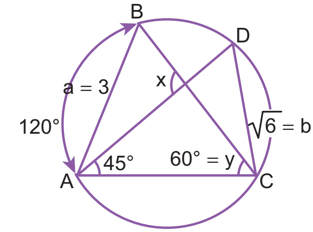
4.



Como:
$\ell_3 = 3\sqrt{6}$
$R\sqrt{3} = 3\sqrt{6} \Rightarrow R = 3\sqrt{2}$
$\Rightarrow \ell_4 = R\sqrt{2} = (3\sqrt{2})\sqrt{2} = 6$
Por lo tanto:
El perímetro del cuadrado es: 4(6) = 24

Clave D

5.



Dato: $R = \sqrt{3}$
$a = kR$
$3 = k\sqrt{3} \Rightarrow k = \sqrt{3}$
Luego:
$a = KR = R\sqrt{3} \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 120°$
$b = n \cdot R$
$\sqrt{6} = n \cdot \sqrt{3} \Rightarrow n = \sqrt{2}$
Luego:
$b = nR = \sqrt{2}R \Rightarrow m\overset{\frown}{CD} = 90°$
$\Rightarrow x = 45° + 60° = 105°$
$\therefore x + y = 165°$

Clave D

6. Piden: $\dfrac{\ell_{10}}{\ell_6}$

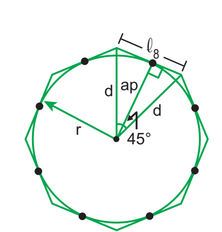
Sabemos que si R es el radio de la circunferencia circunscrita, entonces:

$\ell_{10} = R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \wedge \ell_6 = R$

$\therefore \dfrac{\ell_{10}}{\ell_6} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Clave D

7.



Octógono regular:

$\ell_8 = d\sqrt{2-\sqrt{2}} \wedge ap = \dfrac{d}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ...(1)

Dato: $r = ap = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{d}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow d = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Luego, en (1):

$\ell_8 = \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}$

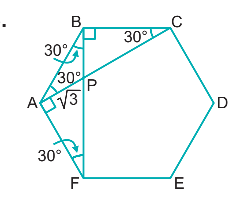
Racionalizando, obtenemos:

$\ell_8 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2^2-2}} = \sqrt{2}-1$

$\therefore \ell_8 = \sqrt{2}-1$

Clave C

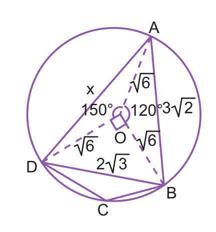
8.



En el ◺PAF: $AF = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) = 3$
$\therefore 2p_{ABCDEF} = 6(3) = 18$

Clave D

9.

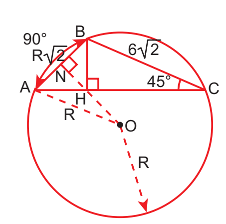


En el ΔAOB:
$3\sqrt{2} = (\sqrt{6})(\sqrt{3})$
$\Rightarrow m\angle AOB = 120°$

En el ΔDOB:
$(2\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2$
$\Rightarrow m\angle DOB = 90°$
$\Rightarrow m\angle DOA = 360° - (120° + 90°) = 150°$
$(AD)^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2(\sqrt{6})^2\cos 150°$
$(AD)^2 = 12 - 12\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$(AD)^2 = 12 + 6\sqrt{3}$
$AD = \sqrt{12 + 2\sqrt{9 \cdot 3}}$
$AD = 3 + \sqrt{3}$

Clave C

10.



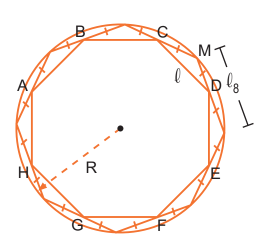
$AN = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m\angle AON = 45°$

$m\overset{\frown}{AB} = 90° \Rightarrow m\angle ACB = 45°$

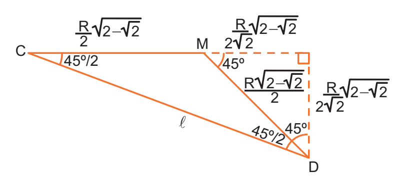
$\therefore BH = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$

Clave E

11. Piden: perímetro de ABCDEFGH



Sabemos que: $\ell_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
En el ΔCMD:



Conociendo el ◺de 45°/2 y 135°/2:

$\ell = \dfrac{R}{2\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$

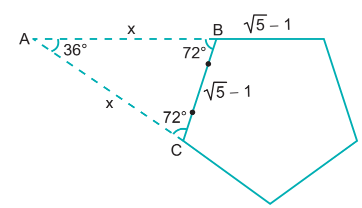
$\Rightarrow \ell = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ Perímetro de ABCDEFGH $= 8\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 4R\sqrt{2}$

Clave B

12. Piden: x

$\triangle$ABC: Decágono regular

R = x ; $\alpha_{10} = 36°$

$\Rightarrow \ell_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

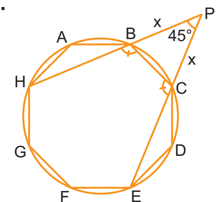
Dato: $\ell_{10} = \sqrt{5}-1$

$\Rightarrow \sqrt{5}-1 = \frac{x}{2}(\sqrt{5}-1)$

$\therefore$ x = 2

Clave D

13.



Del gráfico:

m $\angle$ HBC = m $\angle$ BCE

$\Rightarrow$ $\triangle$BPC triángulo isósceles

Luego:

$m\angle BPC = \frac{m\widehat{HE} - m\widehat{BC}}{2} = \frac{135° - 45°}{2}$

m $\angle$ BPC = 45°

Luego:

En el $\triangle$BPC

$BC = \ell_8 = x\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Por dato

$BC = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

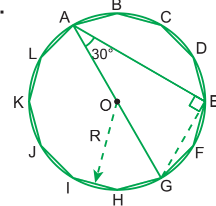
$x\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

x = 1

$\therefore$ PB = 1 cm

Clave A

14.



Del dodecágono regular:

AG diámetro; m$\angle$EAG = 30°

AEG notable de 30° y 60°

$\Rightarrow$ AG = 2R ; AE = $R\sqrt{3}$

Por dato:

AG – AE = 3

$2R - R\sqrt{3} = 3$

$R = 3(2+\sqrt{3})$

Luego:

$\ell_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\ell_{12} = 3(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\therefore \ \ell_{12} = 3\sqrt{2+\sqrt{3}}$ u

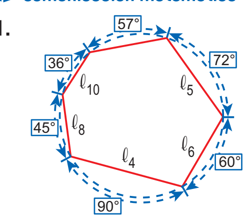
Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 88) Unidad 3

Comunicación matemática

1.

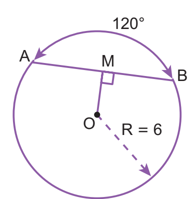


2.

3.

Razonamiento y demostración

4.



Del gráfico: $\overline{OM}$ es el apotema de un triángulo equilátero

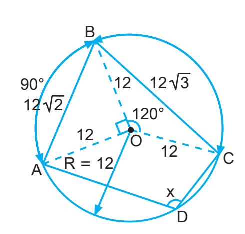
$\Rightarrow OM = a_3 = \frac{R}{2}$

$OM = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ OM = 3

Clave A

5.



Del gráfico:

$AB = R\sqrt{2} \Rightarrow AB = \ell_4 \Rightarrow m\widehat{AB} = 90°$

$BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BC = \ell_3 \Rightarrow m\widehat{BC} = 120°$

Por ángulo inscrito en la circunferencia:

$x = \frac{m\widehat{ABC}}{2} = \frac{90° + 120°}{2} = 105°$

$\therefore$ x = 105°

Clave B

6.

Por dato: $AC = R\sqrt{3} \wedge BD = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC = \ell_3 \Rightarrow m\widehat{AC} = 120°$

$\Rightarrow \beta + \alpha = 240°$ ...(1)

$\Rightarrow BD = \ell_4 \Rightarrow m\widehat{BD} = 90°$

$\Rightarrow \theta + \alpha = 90°$ ...(2)

De (1) y (2): $\beta - \theta = 150°$

Por propiedad del ángulo exterior de la circunferencia:

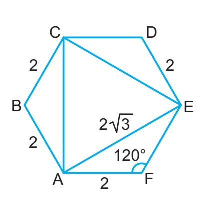
$x = \frac{\beta - \theta}{2} = \frac{150°}{2}$

$\therefore$ x = 75°

Clave D

Resolución de problemas

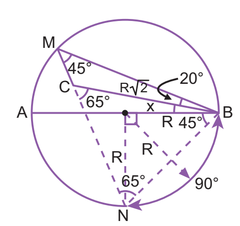
7.



$\therefore 2p_{ACE} = 3(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

Clave B

8.



La prolongación de $\overline{MC}$ pasa por N ya que $m\widehat{NB} = 90°$

$\overline{CB}$ es el lado de un cuadrado de circunradio R.

$CB = R\sqrt{2}$

$NB = R\sqrt{2}$

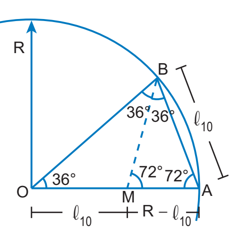
El $\triangle$CBN es isósceles, entonces:

65° + 65° + 45° + x = 180°

x = 5°

Clave B

9.



Trazamos la bisectriz BM del $\angle$OBA.

$\Rightarrow AB = MB = OM = \ell_{10}$

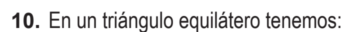
Por propiedad de semejanza:

$(\ell_{10})^2 = R(R - \ell_{10})$

Resolviendo:

$\therefore \ell_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

Clave D



10. En un triángulo equilátero tenemos:

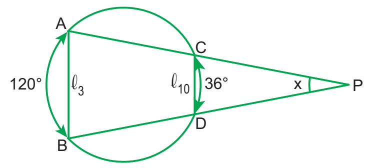
Inradio: $ap_3 = \frac{R}{2}$

Circunradio: R

$\Rightarrow \frac{\text{Inradio}}{\text{Circunradio}} = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$

Clave D

11.



De la figura:

$m\overset{\frown}{AB} = 120° \wedge m\overset{\frown}{CD} = 36°$

Luego, por ángulo exterior:

$\therefore x = \frac{120° - 36°}{2} = 42°$

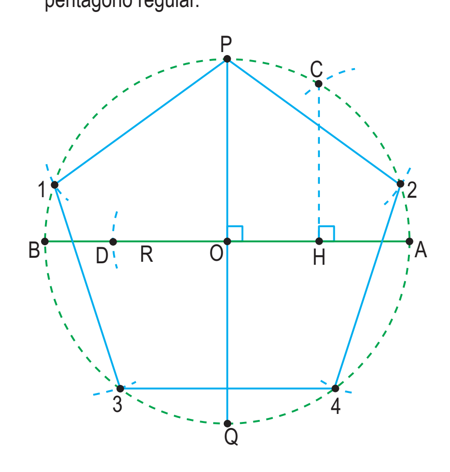
Clave C

Nivel 2 (página 88) Unidad 3

Comunicación matemática

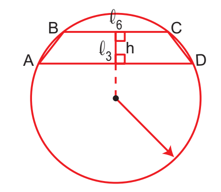
12.

13. Primero trazamos un diámetro perpendicular al diámetro AB, es decir, el diámetro PQ; luego determinamos el punto medio de $\overline{OA}$, trazando con radio R y centro en A un arco que determina el punto C; luego trazamos $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{OA}$; luego con radio HP y centro en H determinamos el punto D sobre $\overline{AB}$; nuevamente con centro en P y radio PD determinamos los puntos 1 y 2, ahora con centro en 1 y 2 y radio PD determinamos sobre la circunferencia los puntos 3 y 4, finalmente los puntos P; 1; 2; 3 y 4 son los vértices de un pentágono regular.



Razonamiento y demostración

14.



Del gráfico:

$h = ap_6 - ap_3$

$\Rightarrow h = \frac{R}{2}\sqrt{3} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$

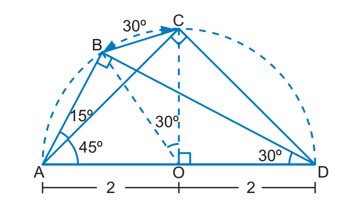
Dato:

$R = \sqrt{3} + 1$

$\therefore h = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} = 1$

Clave B

15.



$m\angle ABD = m\angle ACD = 90°$

$\Rightarrow$ ⊡ABCD es inscriptible y $\overline{AC}$ es diámetro.

$m\overset{\frown}{BC} = 30°$

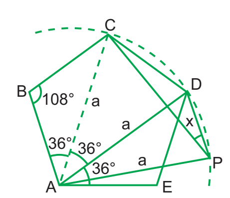
$\Rightarrow BC = \ell_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Del gráfico: R = 2

$\therefore BC = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Clave D

16.



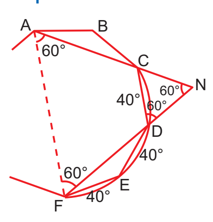
$2x = 36°$

$x = 18°$

Clave A

Resolución de problemas

17.



AN = FN

$\Rightarrow m\angle FAN = m\angle AFN = 60°$

Por ángulo inscrito:

$m\overset{\frown}{FC} = 120°$

$\overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{CD} = 40°$

$40° = \frac{360°}{n}$

$\Rightarrow n = 9$

$\therefore$ n.° de diagonales: $\frac{9(9-3)}{2} = 27$

Clave B

18. Ambos polígonos tienen el mismo radio (R).

Para el cuadrado:

$\ell_4 = 4\sqrt{6}$

$R\sqrt{2} = 4\sqrt{6} \quad \Rightarrow R = 4\sqrt{3}$

Para el hexágono regular:

$\ell_6 = R$

$\Rightarrow \ell_6 = 4\sqrt{3}$

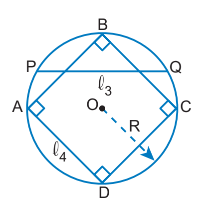
Piden el perímetro del hexágono regular (2p):

$\Rightarrow 2p = 6(\ell_6) = 6(4\sqrt{3})$

$\therefore 2p = 24\sqrt{3}$

Clave D

19.



Por dato: $m\overset{\frown}{PBQ} = 120°$

$\Rightarrow PQ = \ell_3$

$6 = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$

Luego:

$\ell_4 = R\sqrt{2} = (2\sqrt{3})(\sqrt{2})$

$\therefore \ell_4 = 2\sqrt{6}$

Clave C

20. Ambos polígonos tienen el mismo radio (R).

Por dato: perímetro triangulo regular = 30

$\Rightarrow 3(\ell_3) = 30$

$\ell_3 = 10$

$R\sqrt{3} = 10 \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Para el hexágono regular:

$\ell_6 = R \Rightarrow \ell_6 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

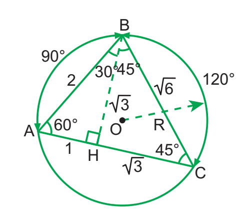
Piden: perímetro del hexágono regular (2p)

$\Rightarrow 2p = 6(\ell_6) = 6\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore 2p = 20\sqrt{3}$ m

Clave D

21.



Por dato: $R = \sqrt{2}$ m, $m\overset{\frown}{AB} = 90°$, $m\overset{\frown}{BC} = 120°$

Entonces:

$AB = \ell_4 = R\sqrt{2} = (\sqrt{2})\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB = 2$

$BC = \ell_3 = R\sqrt{3} = (\sqrt{2})\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{6}$

Del gráfico: AC = AH + HC

$\Rightarrow AC = 1 + \sqrt{3}$

$\therefore AC = (1 + \sqrt{3})$ m

Clave E

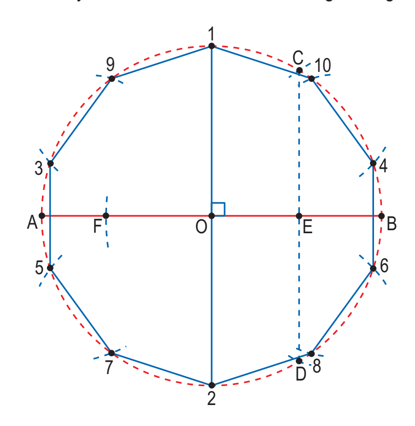
Nivel 3 (página 89) Unidad 3

Comunicación matemática

22.

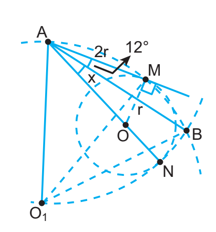
23. Primero determinamos los puntos 1 y 2 trazando un diámetro perpendicular a $\overline{AB}$; luego con centro

en B y radio R determinamos los puntos C y D; $\overline{CD}$ divide a $\overline{OB}$ en su punto medio E. Ahora con centro en E y radio IE hallamos el punto F sobre $\overline{AB}$; nuevamente pero ahora con centros en 1 y 2 y radio IF hallamos sobre la circunferencia los puntos 3; 4 y 5; 6 respectivamente; finalmente con el mismo radio IF, pero con centros en 3; 4; 5 y 6 determinamos los puntos 7; 8; 9 y 10 respectivamente. Luego, los puntos 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 y 10 son los vértices de un decágono regular.



Razonamiento y demostración

24.



Si OM = r; del dato: AM = 2(OM)

$\Rightarrow$ AM = 2r ... (1)

ΔAMO es notable de 53°/2

$\Rightarrow m\angle MAO = 53°/2$ y $AO = r\sqrt{5}$

Luego: $O_1A = AN = O_1B$

$O_1A = AO + ON = r\sqrt{5} + r$

$\therefore\ O_1A = r(\sqrt{5}+1)$

$\Rightarrow r = \dfrac{(O_1A)(\sqrt{5}-1)}{4}$ ... (2)

De (1) y (2). $AM = \left(\dfrac{O_1A}{2}\right)(\sqrt{5}-1)$

En el ΔAMO_1: $AM = \ell_{10} \Rightarrow m\angle AO_1M = 36°$

Además ΔAO_1B es equilátero

$\therefore\ m\overset{\frown}{MB} = m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{AM}$

Reemplazando:

$m\overset{\frown}{MB} = 60° - 36° = 24° \Rightarrow m\angle MAB = 12°$

Finalmente: $m\angle MAO = m\angle MAB \angle m\angle BAN$,

Reemplazando:

$53°/2 = 12° + x \Rightarrow x = 29°/2 \quad \therefore\ m\overset{\frown}{BN} = 29°$

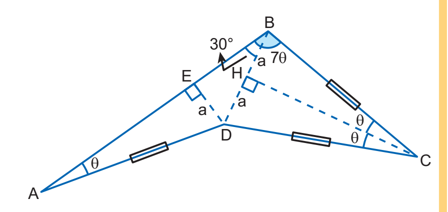
Clave C

25. Trazamos $\overline{HC} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DE} \perp \overline{AB}$

$\therefore\ \Delta AED \cong \Delta DHC \cong \Delta BHC \Rightarrow ED = HD = HB$

En el ΔDEB (notable de 30°)

$M\angle EBD = 30°$



En el ◺BHC: $m\angle HBC \angle m\angle BCH = 90°$

Reemplazando:

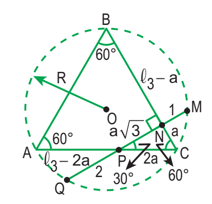
$7\theta - 30° + \theta = 90° \Rightarrow 8\theta = 120\ \therefore\ \theta = 15°$

En el ΔBCD: $BD = \ell_{12} \Rightarrow BD = (BC)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\therefore\ BD = 4\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Clave B

26.



Del gráfico: ◺PNC es notable de 30° y 60°.

$\Rightarrow NC = a$, $PC = 2a$ y $PN = a\sqrt{3}$

ΔABC es equilátero, entonces:

$AB = AC = BC = \ell_3$

$\Rightarrow BN = BC - NC = \ell_3 - a$

$AP = AC - PC = \ell_3 - 2a$

Por el teorema de las cuerdas:

I. (BN)(NC) = (NH)(QN)

Reemplazando: $(\ell_3 - a)(a) = (1)(2 + a\sqrt{3})$

$\Rightarrow a\ell_3 = 2 + a\sqrt{3} + a^2$ ... (1)

II. (AP)(PC) = (QP)(PM); reemplazando

$(\ell_3 - 2a)(2a) = (2)(a\sqrt{3})$

$\Rightarrow 2a\ell_3 - 4a^2 = 2a\sqrt{3} + 2$ ... (2)

De (1) y (2): $2(2 + a\sqrt{3} + a^2) - 4a^2 = 2a\sqrt{3} + 2$

$4 + 2a\sqrt{3} + 2a - 4a^2 = 2a\sqrt{3} + 2$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$

Reemplazando en (1): $\ell_3 = 3 + \sqrt{3} = R\sqrt{3}$

$\therefore\ R = \sqrt{3} + 1$

Clave B

Resolución de problemas

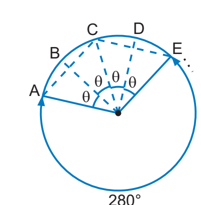
27. La medida del radio es igual a la medida del lado del hexágono.

$\Rightarrow R = 6$ m

- El lado del cuadrado es: $R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ m
- Su perímetro es: $4(6\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$ m

Clave C

28. Según el enunciado:

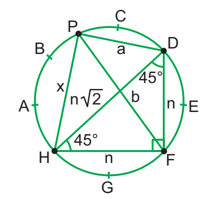


- Se nota: $m\overset{\frown}{AE} = 80° \Rightarrow \theta = 20°$
- 360° : 20° = 18
- El polígono es de 18 lados.
- El número de diagonales es:

$\dfrac{18(15)}{2} = 135$

Clave D

29. Por el teorema de Ptolomeo:



$bn\sqrt{2} = xn + an$

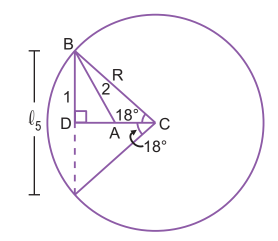
Donde n es lado del cuadrado.

$\Rightarrow b\sqrt{2} = x + a$

$\therefore\ x = b\sqrt{2} - a$

Clave B

30.



Dato:

$BC = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow R = \sqrt{5} + 1$

$BD = \dfrac{\ell_{10}}{2} = \dfrac{\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}{2}$

$BD = \dfrac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4} = 1$

$\Rightarrow m\angle DAB = 30°$

$\therefore m\angle A = 150°$

Clave B

31.

$AC = 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$AC = 2(\sqrt{3}+1)$

$2R = 2(\sqrt{3}+1)$

$R = \sqrt{3}+1$

Por teoría:

$MB = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$MB = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$MB = \sqrt{2}$

En el ΔMBP isósceles:

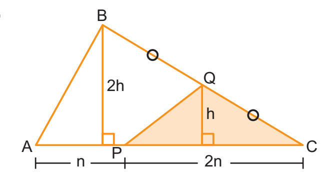
$40° = 15° + x$

$x = 25°$

Clave B

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 91) Unidad 3

1.



$S_{\Delta ABC} = 120\ m^2$

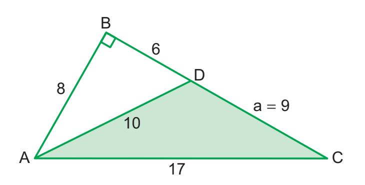
$\dfrac{3n \cdot 2h}{2} = 120 \Rightarrow nh = 40$

$\Rightarrow S_{\Delta PQC} = \dfrac{2n \cdot h}{2} = nh$

$\therefore S_{\Delta PQC} = 40\ m^2$

Clave D

2.



$17^2 = 8^2 + (a + 6)^2$
$289 = 64 + (a + 6)^2$
$225 = (a + 6)^2$
$15 = a + 6 \Rightarrow a = 9$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC}$

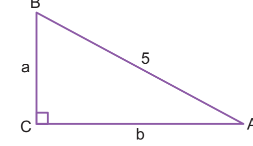
$\dfrac{8 \cdot 15}{2} = \dfrac{8 \cdot 6}{2} + S_{\Delta ADC}$

$60 = 24 + S_{\Delta ADC}$

$\therefore S_{\Delta ADC} = 36$

Clave C

3.



Piden:

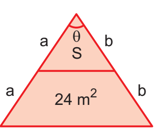
$S_{\Delta ACB} = \dfrac{a \cdot b}{2}$ ... (1)

Dato:
$a + b = 7$
$(a + b)^2 = 7^2$
$a^2 + b^2 + 2ab = 49$
$25 + 2ab = 49$
$2ab = 24$
$ab = 12$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):
$S_{\Delta ACB} = 6\ cm^2$

Clave B

4.



Del gráfico:

$S = \dfrac{a \cdot b}{2}\text{sen}\theta$ ...(1)

$S + 24 = \dfrac{2a \cdot 2b}{2}\text{sen}\theta$ ...(2)

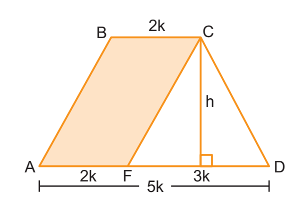
De (1) y (2):

$S + 24 = 4\left(\dfrac{ab\text{sen}\theta}{2}\right)$

$S + 24 = 4S$
$24 = 3S$
$\therefore S = 8\ m^2$

Clave D

5.



$A_{\square ABCD} = 14$

$\left(\dfrac{5k + 2k}{2}\right)h = 14$

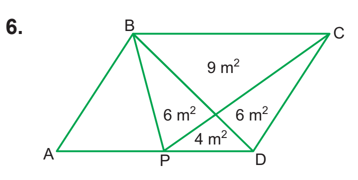
$\dfrac{7kh}{2} = 14 \Rightarrow kh = 4$

$A_{\square ABCF} = 2k \cdot h = 2(4)$

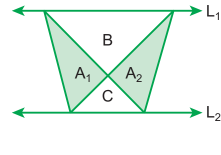
$\therefore A_{\square ABCF} = 8\ m^2$

Clave C

6.



Observación:



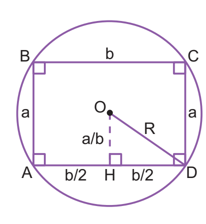
Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
$\Rightarrow A_1 = A_2$
Además:
$A_1A_2 = BC$

$\Rightarrow A_{\square ABCD} = 2A_{\Delta BPC} = 2(9 + 6)$

$A_{\square ABCD} = 30\ m^2$

Clave A

7.



Por dato: $2a + 2b = 24$
$\Rightarrow a + b = 12$ ...(1)
Además: $R = \sqrt{74}/2$

En el ◺OHD por el teorema de Pitágoras:

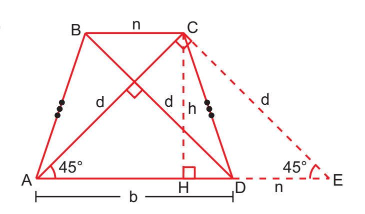
$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} = \dfrac{74}{4}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 74$ ...(2)
De (1) y (2): $a = 5 \wedge b = 7$

Piden:
$A_{\square ABCD} = ab = (5)(7)$
$\therefore A_{\square ABCD} = 35\ cm^2$

Clave E

8.



Por dato:
$\dfrac{b + n}{2} = a \Rightarrow b + n = 2a$

Trazamos $\overline{CE} // \overline{BD}$, entonces el ▱BCED es un romboide.
El ◺ ACE resulta notable de 45°.
$2h = b + n \Rightarrow h = a$

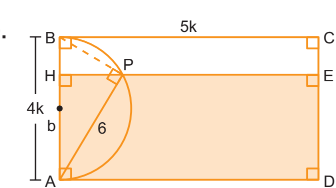
Piden:

$A_{\square ABCD} = \left(\dfrac{b + n}{2}\right) \cdot h = \left(\dfrac{2a}{2}\right)(a) = a^2$

$\therefore A_{\square ABCD} = a^2$

Clave C

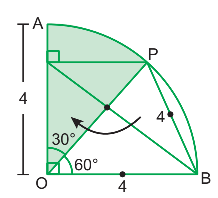
9.



En el ◺ APB por relaciones métricas:
$6^2 = (4k)(b) \Rightarrow bk = 9$
Piden:
$A_{\square AHED} = (5k)(b) = 5(bk) = 5(9)$
$\therefore A_{\square AHED} = 45$

Clave D

10.

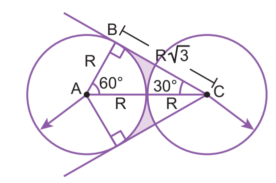


Sea A el área de la región sombreada:

$A = \dfrac{\pi \cdot 30° 4^2}{360°} = \dfrac{4\pi}{3}\ m^2$

Clave A

11. 



$$\frac{A_{sombreada}}{2} = A_{\Delta ABC} - A_{\triangleleft 1} - A_{\triangleleft 2}$$

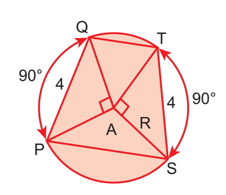
$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi 60^\circ \cdot R^2}{360^\circ} + \frac{\pi \cdot 30^\circ \cdot R^2}{360^\circ}\right)$$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{90^\circ \pi R^2}{360^\circ} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\therefore A_{sombreada} = \frac{R^2}{2}(\sqrt{3} - \pi/2)$$

Clave E

12.



$R\sqrt{2} = 4 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$

Sea A el área de la región sombreada:

$$A = \pi \cdot R^2 - \left(\frac{\pi}{4} \cdot R^2 - \frac{R^2}{2} + \frac{\pi \cdot R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right)$$

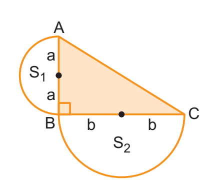
$$A = \pi \cdot R^2 - \frac{2\pi}{4}R^2 + \frac{2R^2}{2} = \pi R^2 - \frac{\pi R^2}{2} + R^2$$

$$A = \pi \cdot 8 - \frac{\pi \cdot 8}{2} + 8 = 4\pi + 8$$

$$\therefore A = 4(\pi + 2)\ m^2$$

Clave B

13.



$$S_1 = \frac{\pi a^2}{2} = 18\pi \quad \Rightarrow a = 6$$

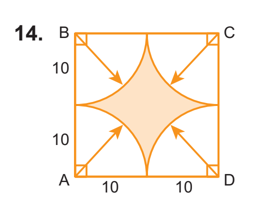
$$S_2 = \frac{\pi b^2}{2} = 32\pi \quad \Rightarrow b = 8$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2a(2b)}{2} = 2ab$$

$$\therefore S_{\Delta ABC} = 2(6)(8) = 96\ cm^2$$

Clave D

14.



Del gráfico:

$A_{somb.} = A_{\square} - 4A_{◺}$

$$A_{somb.} = (20)^2 - 4\left(\frac{\pi \cdot 10^2}{4}\right)$$

$A_{somb.} = 400 - 100\pi$

$A_{somb.} = 400 - 100(3{,}14159)$

$\therefore A_{somb.} = 85{,}84\ cm^2$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 93) Unidad 3

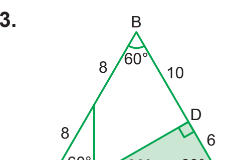
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3.



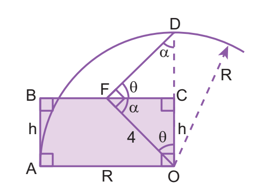
Área del ΔDEC:

$$S = \frac{6 \times 12}{2}\text{sen}60^\circ = \frac{6 \times 12}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{72\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}\ m^2$$

Clave D

4. 



En el ◺OFD por relaciones métricas:

$(OF)^2 = (OC)(OD) \Rightarrow 4^2 = (h)(R)$

$\Rightarrow Rh = 16$

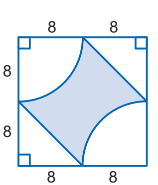
Piden:

$A_{\square ABCO} = R \cdot h = 16$

$\therefore A_{\square ABCO} = 16\ cm^2$

Clave B

5.



$S_{\square} = 16^2 = 256$

$$S_{\triangle} = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$

$$S_{◺} = \left(\frac{\pi \times 8^2}{4}\right) = 16\pi = 50{,}24$$

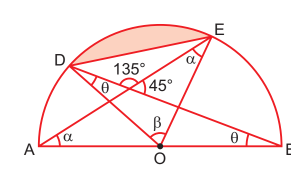
$S = S_{\square} - 2S_{\triangle} - 2S_{◺}$

$S = 256 - (64 + 100{,}48)$

$S = 256 - 164{,}48 \qquad \therefore S = 91{,}52$

Clave C

6.



$\alpha + \theta = 45^\circ$

$\alpha + \theta + \beta = 135^\circ$ $\Big\} \beta = 90^\circ$

Área pedida: $A = A_{\triangleleft} - A_{\triangle}$

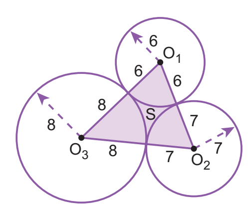
$$A = \frac{90^\circ \pi (4)^2}{360^\circ} - \frac{4(4)}{2}$$

$A = 4\pi - 8 \quad \therefore A = 4(\pi - 2)\ m^2$

Clave D

Resolución de problemas

7.



Del gráfico: los lados del $\Delta O_1O_2O_3$ serán 13; 15 y 14.

Sea: $S_{\Delta O_1O_2O_3} = S$

Luego, por la fórmula de Herón:

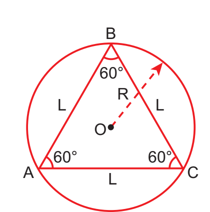
$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)}$$

$S = \sqrt{7056} \qquad \therefore S = 84$

Clave C

8.



Por dato: $R = 4$

Por polígonos regulares: $L = \ell_3 = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow L = 4\sqrt{3}$

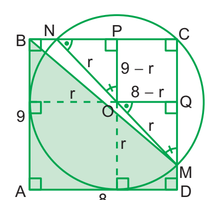
$$\text{Luego: } S_{\Delta ABC} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore S_{\Delta ABC} = 12\sqrt{3}$

Clave D

9.



Piden:

$$A_{ABMD} = \frac{1}{2}(9 + MD)(8) = 4(9 + MD) \quad ...(1)$$

Del gráfico: ◺OPN ≅ ◺MQO (ALA)

$\Rightarrow QM = OP = 9 - r \quad ...(2)$

Por el teorema de Pitágoras en el ◺OQM:

$(8 - r)^2 + (9 - r)^2 = r^2$

$r(34 - r) = 145 \Rightarrow r = 5$



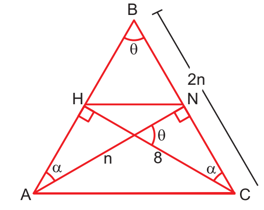
Reemplazando en (2):
QM = OP = 9 – (5) = 4 ⇒ CM = 8

Luego:
CD = CM + MD
9 = 8 + MD
⇒ MD = 1

Reemplazando en (1):
$A_{ABMD} = 4(9 + 1) = 4(10) \quad \therefore\ A_{ABMD} = 40$

Clave D

10.

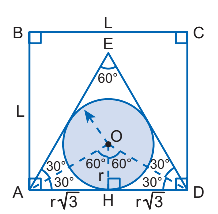


$$A = \frac{n\,.\,8\text{sen}\theta}{2} = 4n\text{sen}\theta = 4n\left(\frac{8}{2n}\right)$$

$A = 16\ m^2$

Clave E

11.



Por dato: $A_{\square} = X\ cm^2$
$\Rightarrow L^2 = X$
Del gráfico: $L = 2r\sqrt{3}$

$$L^2 = 12r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{12}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{X}{12}$$

Piden:

$$A_{\odot} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{X}{12}\right) \quad \therefore\ A_{\odot} = \frac{\pi X}{12}\ cm^2$$

Clave A

Nivel 2 (página 93) Unidad 3

Comunicación matemática

12.
13.

Razonamiento y demostración

14. Por la fórmula trigonométrica:

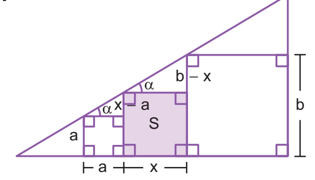
$$A = \frac{1}{2}\ ab\text{sen}\theta$$

El área (A) será máxima cuando: senθ = 1

$$\therefore\ A_{máx.} = \frac{ab}{2}$$

Clave B

15.



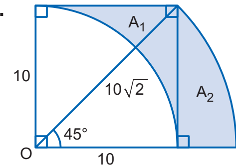
$$\frac{x - a}{a} = \frac{b - x}{x}$$

$x^2 - ax = ab - ax$

$x^2 = ab \qquad \therefore\ S = x^2 = ab$

Clave B

16.



Del gráfico:

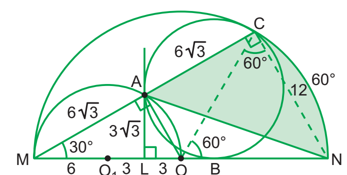
$$A_1 = 10^2 - \frac{\pi(10)^2}{4} = 100 - 25\pi$$

$$A_2 = \frac{\pi(10\sqrt{2})^2\,.\,45°}{360°} - \frac{(10)(10)}{2} = 25\pi - 50$$

Luego:
$A_{somb.} = A_1 + A_2 = (100 - 25\pi) + (25\pi - 50)$
$\therefore\ A_{somb.} = 50\ m^2$

Clave E

17.



En el ◺MAO por relaciones métricas.
$(AL)^2 = 9\,.\,3 \Rightarrow AL = 3\sqrt{3}$
⇒ m∠AMO = 30°

Del gráfico:

$$A_{\Delta CON} = \frac{(12)^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$$

$$A_{\triangle ACN} = \frac{(6\sqrt{3})(12)}{2} = 36\sqrt{3}$$

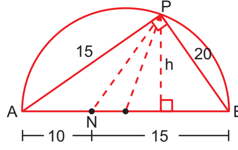
Entonces, el área sombreada es equivalente al área del sector circular de 60°.

$$A_{somb.} = \frac{\pi(12)^2\,.\,60°}{360°} = 24\pi$$

Clave E

Resolución de problemas

18.



Por Pitágoras:
PB = 20
15(20) = 25(h)

$$12 = h \quad \therefore\ S_{\Delta APN} = \frac{10(12)}{2} = 60$$

Clave E

19.

Prolongamos $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$, entonces el triángulo que se forma es rectángulo y notable de 37° y 53°.
⇒ BH = 8 ∧ HC = 6
En el ◺AHD por el teorema de Pitágoras: HD = 8
Del gráfico:

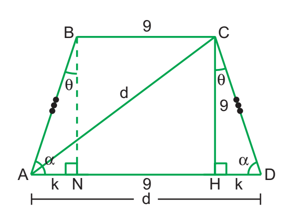
$S_{\square ABCD} = S_{\triangle AHD} - S_{\triangle BHC}$

$$S_{\square ABCD} = \frac{(15)(8)}{2} - \frac{(8)(6)}{2} = 60 - 24$$

$\therefore\ S_{\square ABCD} = 36$

Clave B

20.



Del gráfico: ◺ANB ≅ ◺DHC (A – L – A)

$$\text{Luego: } 2k + 9 = d \Rightarrow k = \frac{d - 9}{2} \qquad ...(1)$$

En el ◺AHC por el teorema de Pitágoras:
$d^2 = (k + 9)^2 + 9^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

$$d^2 = \left(\frac{d + 9}{2}\right)^2 + 9^2$$

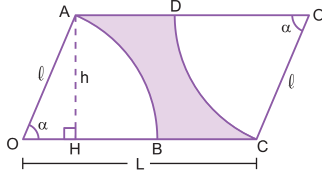
Resolviendo: d = 15
Piden:

$$A_{\square ABCD} = \frac{(9 + d)}{2} \cdot 9 = \frac{(9 + 15)}{2} \cdot 9$$

$\therefore\ A_{\square ABCD} = 108\ cm^2$

Clave A

21.



Por dato: α está expresado en radianes.ℓ

$$\Rightarrow A_{\sphericalangle CO'D} = \frac{\alpha\ell^2}{2}$$

Luego, los sectores circulares CO'D y AOB tienen la misma área.

$$\Rightarrow A_{\sphericalangle CO'D} = \frac{\alpha\ell^2}{2}$$

Del gráfico:
$A_{\square} = 2(A_{\sphericalangle}) + A_{somb.}$

$$L\,.\,h = 2\left(\frac{\alpha\ell^2}{2}\right) + A_{somb.}$$

$\Rightarrow A_{somb.} = Lh - \alpha\ell^2 \qquad ...(1)$

$$\text{En el ◺OHA: sen}\alpha = \frac{h}{\ell} \Rightarrow h = \ell\text{sen}\alpha$$

Reemplazando en (1):
$A_{somb.} = L(\ell\text{sen}\alpha) - \alpha\ell^2$
$\therefore\ A_{somb.} = \ell(L\text{sen}\alpha - \ell\alpha)$

Clave C



Nivel 3 (página 94) Unidad 3

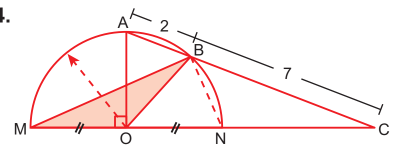
Comunicación matemática

22.

23.

Razonamiento y demostración

24.



Considerar a O como centro de la semicircunferencia.

Del gráfico:

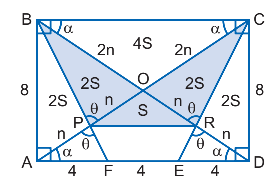
$A_{\Delta MOB} = A_{\Delta BON}$

$$A_{\Delta BON} = \frac{1}{4}(AB)(BC) = \frac{2(7)}{4} = 3{,}5$$

$\therefore A_{\Delta MOB} = 3{,}5$

Clave E

25.



Del gráfico: $\Delta APF \sim \Delta CPB \wedge \Delta ERD \sim \Delta CRB$

Luego:

$$A_{\triangle BCD} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 8S \Rightarrow S = 6$$

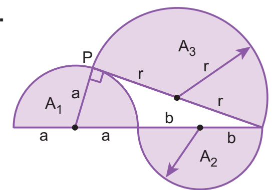
Piden:

$A_{somb.} = 5S = 5(6) = 30$

$\therefore A_{somb.} = 30\ m^2$

Clave A

26.



Del gráfico:

$$A_1 = \frac{\pi a^2}{2}; A_2 = \frac{\pi b^2}{2}; A_3 = \frac{\pi r^2}{2}$$

Luego, del triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$a^2 + (2r)^2 = (a + 2b)^2$

$a^2 + 4r^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

$\Rightarrow r^2 = ab + b^2$ ...(1)

Por dato:

$$A_1 = 9 \Rightarrow a = 3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$A_2 = 4 \Rightarrow b = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Reemplazando en (1):

$$r^2 = \frac{12}{\pi} + \frac{8}{\pi} = \frac{20}{\pi} \Rightarrow \pi r^2 = 20$$

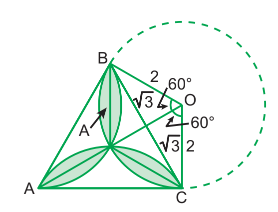
Entonces:

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{(20)}{2} = 10$$

$\therefore A_3 = 10\ m^2$

Clave C

27.



Del gráfico:

$$A = \frac{\pi(2)^2 . 60°}{360°} - \frac{(2)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

Piden:

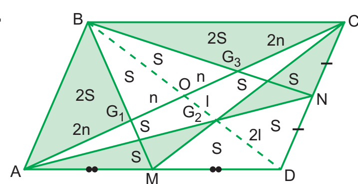
$A_{somb.} = 6A = 4\pi - 6\sqrt{3}$

$A_{somb.} = 2(2\pi - 3\sqrt{3})$

Clave C

Resolución de problemas

28.



Del gráfico:

O: punto de intersección de las diagonales

G_1: baricentro del triángulo ABD

G_2: baricentro del triángulo ACD

G_3: baricentro del triángulo BDC

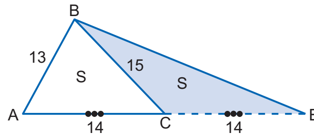
Piden:

$$\frac{S_{somb.}}{S_{total}} = \frac{6S}{12S} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{S_{somb.}}{S_{total}} = \frac{1}{2}$$

Clave A

29.



Para la mediana BC:

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCE} = S$

Para el ΔABC, por la fórmula de Herón:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$S = \sqrt{21(21 - 13)(21 - 14)(21 - 15)}$

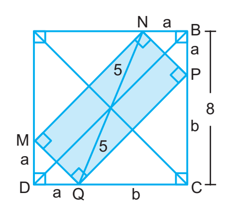
$S = \sqrt{7056}$

$\Rightarrow S = 84$

$\therefore S_{\Delta BCE} = 84$

Clave C

30.



Del gráfico:

$A_{\square MNPQ} = (QP)(MQ) = (b\sqrt{2})(a\sqrt{2}) = 2ab$

Además: $a + b = 8$ ...(1)

En el $\triangle$NPQ por el teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 50$ ...(2)

Luego, elevando (1) al cuadrado:

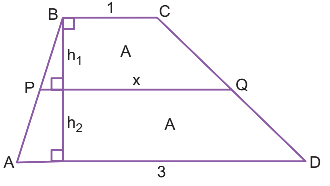
$a^2 + 2ab + b^2 = 64$

$\Rightarrow 50 + 2ab = 64$

$2ab = 14 \quad \therefore A_{\square MNPQ} = 14\ m^2$

Clave C

31.



Del gráfico:

$$2A = \left(\frac{1+3}{2}\right)(h_1 + h_2)\ A = h_1 + h_2 \quad ...(1)$$

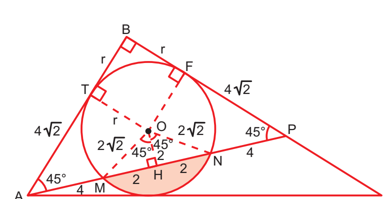
$$A = \left(\frac{1+x}{2}\right)h_1 \quad ...(2)$$

$$A = \left(\frac{x+3}{2}\right)h_2 \quad ...(3)$$

De (1), (2) y (13): $\quad X = \sqrt{5}$ m

Clave C

32.



Por el teorema de la tangente:

$(AT)^2 = (AM)(AN)$

$(AT)^2 = (4)(8) \Rightarrow AT = 4\sqrt{2}$

$(PF)^2 = (PN)(PM)$

$(PF)^2 = (4)(8) \Rightarrow PF = 4\sqrt{2}$

Luego el $\triangle$ABP es notable de 45°

$\Rightarrow AB\sqrt{2} = AP$

$(r + 4\sqrt{2})\sqrt{2} = 12$

$r\sqrt{2} = 4$

$\Rightarrow r = 2\sqrt{2}$

Del gráfico: el $\triangle$MOH y el $\triangle$OHN son notables de 45°.

Piden:

$$A_{\frown MN} = \frac{90°\pi(2\sqrt{2})^2}{360°} - \frac{(2\sqrt{2})^2 \text{sen}90°}{2}$$

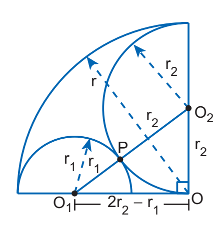
$A_{\frown MN} = 2\pi - 4$

$\therefore A_{\frown MN} = 2(\pi - 2)$

Clave A

MARATÓN MATEMÁTICA (página 96) Unidad 3

1.



De la gráfica: $r = 2r_2$; $OO_2 = r_2$; $OO_1 = 2r_2 - r_1$

Del $\triangle O_1OO_2$:

$$(r_1 + r_2)^2 = (2r_2 - r_1)^2 + r_2^2$$

$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = 4r_2^2 - 4r_2r_1 + r_1^2 + r_2^2$$

$$6r_1r_2 = 4r_2^2$$

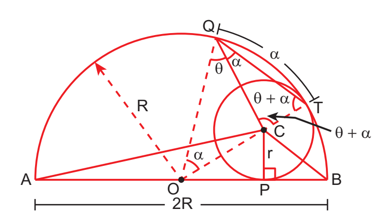
$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3}$$

Nos piden:

$$\frac{A_{\text{menor}}}{A_{\text{mayor}}} = \frac{\frac{\pi r_1^2}{2}}{\frac{\pi r_2^2}{2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Clave D

2.



Por dato:

$m\angle TQC = m\overset{\frown}{TQ} = \alpha$

Por ángulo central: $m\angle QOT = \alpha$

$\Rightarrow m\angle QCT = m\angle QTC = \theta + \alpha$

Por semejanza: $\Delta TOQ \sim \Delta CQT$

$\frac{OT}{TQ} = \frac{QC}{CT} \Rightarrow OT \,.\, CT = TQ \,.\, CQ$

$\Rightarrow R \,.\, r = 8 \,.\, 8 \Rightarrow RT = 64\ m^2$ ... (I)

Nos piden:

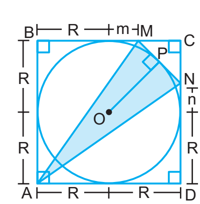
$A_{\Delta ACB} = \frac{2R \,.\, r}{2} = R \,.\, r$

De (I):

$A_{\Delta ACB} = R \,.\, r = 64\ m^2$

Clave B

3.



De la gráfica:

Por rectas tangentes a la circunferencia:
$MP = m$ y $PN = n$

Nos piden: $A_{\Delta AMN}$

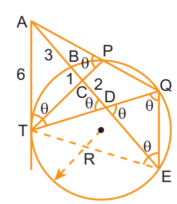
$A_{\Delta AMN} = A_{\Delta BAD} + A_{\Delta BMO} + A_{\Delta DNO} + A_{\Delta MNO} - A_{\Delta ABM} - A_{\Delta ADN}$

$$A_{\Delta AMN} = \frac{(2R)(2R)}{2} + \frac{(R+m)(R)}{2} + \frac{(R+m)(R)}{2} + \frac{(m+n)(R)}{2} - \frac{2R(R+m)}{2} - \frac{2R(R+n)}{2}$$

$$A_{\Delta AMN} = \frac{2R^2}{2} = R^2$$

Clave B

4.



De los datos: $\overline{QE} \parallel \overline{AT}$ y $QE = DE$

$\Rightarrow m\angle DQE = m\angle QDE = m\angle ATD = \theta$

$AT = AD \Rightarrow CD = 2$

De la gráfica:

$m\angle ATQ = m\angle TEQ = \theta \Rightarrow$ El $\square$TPQE es inscrito

$\Rightarrow m\angle TPA = m\angle TEQ = \theta$

De la gráfica:

El $\square$TAPD es inscriptible; por el T. de cuerdas

$(TC)(PC) = (AC)(CD)$

$\Rightarrow TC \,.\, PC = 4 \,.\, 2 = 8 \qquad \therefore\ S = PC \,.\, TC = 8$

Clave E

5.

Si: $\overline{QP} \parallel \overline{BM}$

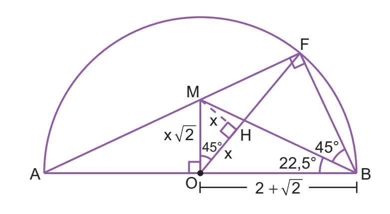
$\Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PM} = 4 \Rightarrow AQ = 4m$ y $QB = m$

Si: $\overline{QR} \parallel \overline{BC}$

$\Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{QR}{BC} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 4{,}8$

Clave D

6.



Del cuadrilátero OMFB inscriptible:

$m\angle MOF = m\angle MBF = 45°$

De la gráfica $\overline{MO}$ es mediatriz:

$m\angle MAQ = m\angle MBO$

$m\angle MAO + m\angle MBO = m\angle FMB = 45°$

$\Rightarrow m\angle MAO = m\angle MBO = 22{,}5°$

Del $\triangle$OHM:

Si $OH = x \Rightarrow OM = x\sqrt{2}$

Del $\triangle$MOB (notable 22,5° y 67,5°):

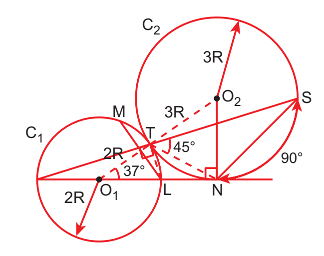
$$\tan 22{,}5° = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{MO}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{x\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$\therefore\ x = 1$

Clave E

7.



Si trazamos $\overline{O_1O_2}$ y $\overline{O_2N}$:

El $\triangle O_1NO_2$ es un triángulo notable 37° y 53°

$\Rightarrow m\overset{\frown}{TL} = 37°$

Del dato:

$m\overset{\frown}{MT} = 23°$ y $m\overset{\frown}{TL} = 37° \Rightarrow m\overset{\frown}{ML} = 60°$ y

$ML = \ell_6 = 2R$

Por propiedad: $m\angle STN = m\angle LTN = 45°$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{NS} = 90°$ y $NS = \ell_4 = 3R\sqrt{2}$

Nos piden:

$$\frac{ML}{NS} = \frac{2R}{3R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

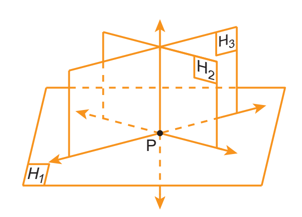
Clave B



Unidad 4

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 99) Unidad 4

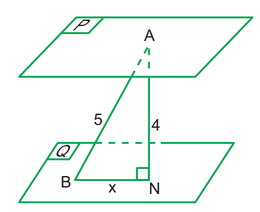
1.



La intersección de los planos H_1, H_2 y H_3 determinan el punto P.
Por lo tanto, son necesarios 3 planos para determinar un punto.

Clave C

2.



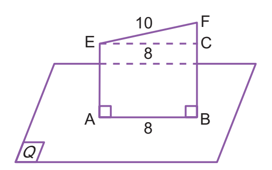
Del gráfico:
$\overline{NB}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano Q.

Por dato: AN = 4 ∧ AB = 5
Piden: BN = x

En el ⊿ANB por el teorema de Pitágoras:
$x^2 + 4^2 = 5^2$
$x^2 = 9$
$\therefore x = 3$ m

Clave C

3.



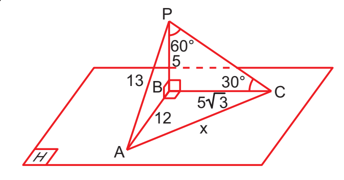
Trazamos: $\overline{EC} // \overline{AB} \Rightarrow EC = AB = 8$

Además:
$EC \perp FB \Rightarrow$ el ΔECF es rectángulo
Por Pitágoras en el ⊿ECF:
$(FC)^2 + 8^2 = 10^2$
$(FC)^2 + 64 = 100 \Rightarrow (FC)^2 = 36$
$\therefore FC = 6$

Piden:
$FB - EA = (FC + CB) - (CB)$
$\Rightarrow FB - EA = FC = 6$
$\therefore FB - EA = 6$

Clave D

4.

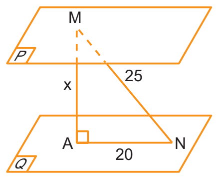


Del ⊿CBP notable de 30° y 60°: BP = 5
En el ⊿PBA por el teorema de Pitágoras: BA = 12

En el ⊿ABC por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 12^2 + (5\sqrt{3})^2 = 144 + 75$
$\Rightarrow x^2 = 219$
$\therefore x = \sqrt{219}$

Clave D

5.

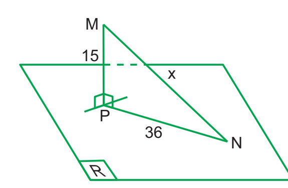


Trazamos $\overline{MA}$ perpendicular al plano Q, además, $\overline{AM}$ es perpendicular al plano P.

En el ⊿MAN por el teorema de Pitágoras:
$x^2 + 20^2 = 25^2$
$x^2 + 400 = 625 \Rightarrow x^2 = 225$
$\therefore x = 15$ m

Clave B

6.

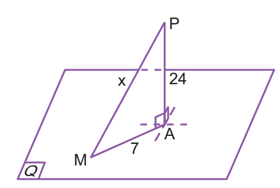


Del gráfico:
$\overline{MP}$ es perpendicular a $\overline{PN}$.

En el ⊿MPN por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 15^2 + 36^2 = 1521$
$\therefore x = 39$

Clave A

7.



En el ⊿PAM por el teorema de Pitágoras:
$x^2 = 7^2 + 24^2 = 625$
$\therefore x = 25$

Clave E

8. Sabemos que el máximo número de planos que determinan 12 puntos en el espacio será:

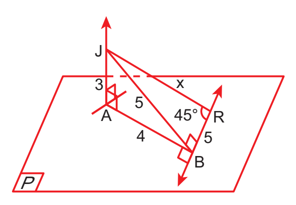
$$C_3^{12} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{(12)(11)(10)9!}{(6)9!}$$

$$C_3^{12} = 220$$

Por lo tanto, serán 220 planos.

Clave A

9.



Trazamos $\overline{JB}$, por el teorema de las tres perpendiculares: m∠JBR = 90°

En el ⊿JAB por el teorema de Pitágoras:
$(JB)^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow JB = 5$

Del ⊿JBR notable de 45°:
$JR = (JB)\sqrt{2} = (5)\sqrt{2}$
$\therefore x = 5\sqrt{2}$

Clave B

10. Por dato: $C_3^n = 10$

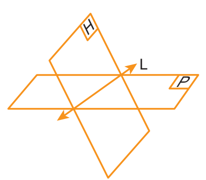
Entonces:
$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = 10$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = 10$$
$$n(n-1)(n-2) = 60 = 5(4)(3)$$

Comparando: n = 5

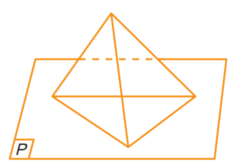
Clave C

11.

- Para determinar un punto son necesarios 3 planos. (Ver el problema número 1).
- Para determinar una recta son necesarios 2 planos.

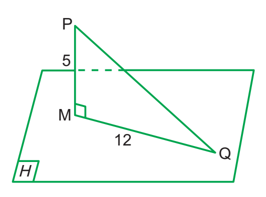


- Para determinar un sólido geométrico son necesarios 4 planos.



Clave D

12.



Del gráfico:

$\overline{MQ}$: proyección de $\overline{PQ}$ sobre el plano H.

En el ⊿PMQ por el teorema de Pitágoras:

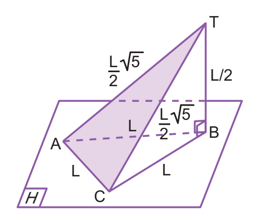
$(PQ)^2 = 5^2 + 12^2$

$(PQ)^2 = 169$

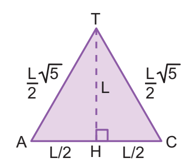
$\therefore PQ = 13$

Clave B

13.



Luego:



En el ⊿AHT por el teorema de Pitágoras:

$TH = L$

Piden:

$$A_{\triangle ATC} = \frac{(AC)(TH)}{2} = \frac{(L)(L)}{2}$$

$$\therefore A_{\triangle ATC} = \frac{L^2}{2}$$

Clave C

14. Del enunciado:

$$n = C_3^5 = \frac{5!}{(3!)2!} = \frac{(5)(4)3!}{(3!)2}$$

$n = 10$

$$m = C_3^4 = \frac{4!}{(3!)1!} = \frac{(4)3!}{3!}$$

$m = 4$

Piden:

$m + n = 4 + 10$

$\therefore m + n = 14$

Clave A

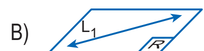
PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 101) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

A) 

B) 

C) L_1, R

D) P, R

2.

I. (F) porque, la recta no tiene inicio ni fin.

II. (V) por definición.

III. (F) porque se tiene que especificar que son coplanarias.

IV. (F) porque no especifican si son colineales o coplanarios.

3.

I. (V), por definición.

II. (V), por definición.

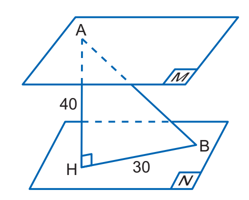
III. (V), porque un plano está formado de varios puntos.

IV. (V), puede pertenecer tanto a una recta o como a varios.

Clave D

Razonamiento y demostración

4.



Del gráfico:

$\overline{HB}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano N.

Por dato: $HB = 30 \wedge AH = 40$

Piden: AB

En el ⊿AHB por el teorema de Pitágoras:

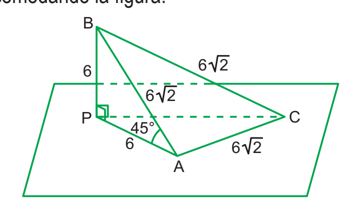
$(AB)^2 = 40^2 + 30^2$

$(AB)^2 = 2500$

$\therefore AB = 50$ m

Clave D

5. Acomodando la figura:



$BC = AC = AB = 6\sqrt{2}$

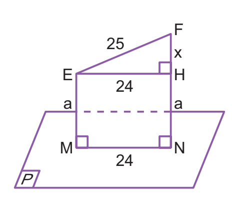
$\Rightarrow \triangle ABC$ es equilátero

$$A_{\triangle ABC} = \frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$

$A_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}\ m^2$

Clave A

6.



Piden:

$FN - EM = (x + a) - (a)$

$\Rightarrow FN - EM = x$

En el ⊿EHF por el teorema de Pitágoras:

$25^2 = 24^2 + x^2$

$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

$\therefore FN - EM = 7$ m

Clave D

Resolución de problemas

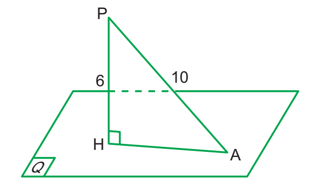
7. El máximo número de planos que determinan 6 puntos en el espacio es:

$$C_3^6 = \frac{6!}{(3!)3!} = \frac{(6)(5)(4)3!}{(6)3!} = 20$$

Por lo tanto, se pueden determinar 20 planos.

Clave D

8.



Del gráfico:

$\overline{AH}$: proyección de $\overline{AP}$ sobre el plano Q.

En el ⊿PHA por el teorema de Pitágoras:

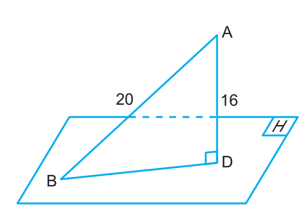
$10^2 = 6^2 + (AH)^2$

$\Rightarrow (AH)^2 = 64$

$\therefore AH = 8$

Clave D

9.



Del gráfico:

$\overline{DB}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano H.

En el ⊿ADB por el teorema de Pitágoras:

$20^2 = 16^2 + (DB)^2$

$\Rightarrow (DB)^2 = 144$

$\therefore DB = 12$

Clave D

10. El máximo número de planos que determinan 8 puntos en el espacio será:

$$C_3^8 = \frac{8(8-1)(8-2)}{6} = \frac{8(7)(6)}{6} = 56$$

Por lo tanto, se pueden determinar 56 planos.

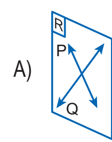
Clave D

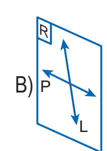


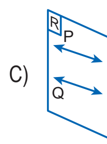
Nivel 2 (página 101) Unidad 4

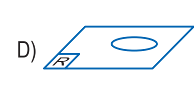
Comunicación matemática

11.

A) 

B) 

C) 

D) 

12.

I. (F) Varía entre 0° y 180°.
II. (V) Por definición.
III. (F) Varía entre 0° y 360°.
IV. (F) Tiene solo 3 aristas.

Clave A

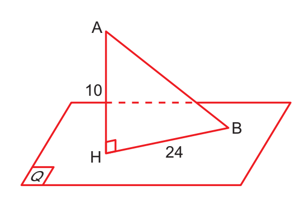
13.

I. (F) por definición, por un punto pasan infinitas rectas.
II. (F) dos puntos determinan una recta.
III. (F) porque tienen que ser colineales.
IV. (F) pertenece a infinitos planos.

Clave D

Razonamiento y demostración

14.



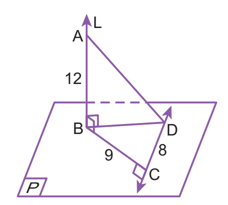
Del gráfico:
$\overline{HB}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano Q.

Por dato: HB = 24 ∧ AH = 10

En el ⊿AHB por el teorema de Pitágoras:
$(AB)^2 = 10^2 + 24^2$
$\Rightarrow (AB)^2 = 676$
$\therefore AB = 26$

Clave D

15.

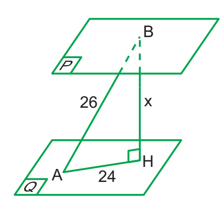


Del gráfico:
En el ⊿BCD por el teorema de Pitágoras:
$(BD)^2 = 9^2 + 8^2 \Rightarrow (BD)^2 = 145$

En el ⊿ABD por el teorema de Pitágoras:
$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$
$(AD)^2 = (12)^2 + 145$
$\Rightarrow (AD)^2 = 289$
$\therefore AD = 17$

Clave D

16.



Del gráfico:
$\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano Q.

$\overline{BH}$: distancia entre los planos P y Q paralelos.

En el ⊿AHB, por el teorema de Pitágoras:
$x^2 + 24^2 = 26^2$
$x^2 = 100$
$\therefore x = 10$ m

Clave A

Resolución de problemas

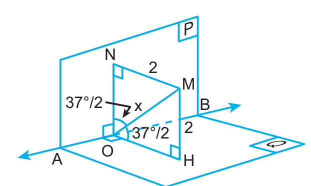
17. El máximo número de planos que determinan 7 puntos en el espacio será:

$$C_3^7 = \frac{7(7-1)(7-2)}{6} = \frac{7(6)(5)}{6} = 35$$

Por lo tanto, se pueden determinar 35 planos.

Clave A

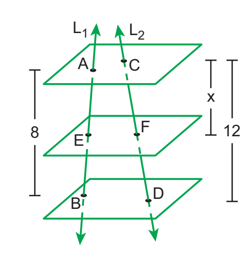
18.



Por el dato: la medida del diedro $\overleftrightarrow{AB}$ es 37°
$\Rightarrow m\angle MOH = 37°$
Los triángulos rectángulos ONM y OHM son congruentes (L-L-A), entonces:
$m\angle NOM = m\angle MOH = 37°/2$
Piden la distancia de M a $\overleftrightarrow{AB}$: MO = x
Del ⊿MHO notable de 37°/2:
$MO = (MH)\sqrt{10} = (2)\sqrt{10}$
$\therefore x = 2\sqrt{10}$

Clave B

19.

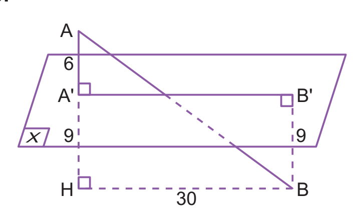


Como FD = 12 – x, luego con el dato:
EB = 11 – x

Por teorema de Thales:
$$\frac{AB}{EB} = \frac{CD}{FD}$$
$$\frac{8}{11-x} = \frac{12}{12-x}$$
$\therefore x = 9$ m

Clave B

20.



Se traza: $\overline{BH}$ // $\overline{A'B'}$

En el ⊿AHB: $AB = \sqrt{15^2 + 30^2}$

$\therefore AB = 15\sqrt{5}$ cm

Clave A

Nivel 3 (página 102) Unidad 4

Comunicación matemática

21. IC; IID; IIIE; IVB; VA

22.

I. (F) porque está incluida en varios planos.
II. (F) porque está incluido en infinitos planos.
III. (F) porque pertenece tanto para una como para todas las rectas.
IV. (F) porque por una recta pasan infinitos planos y por definición de planos se necesitan dos rectas.

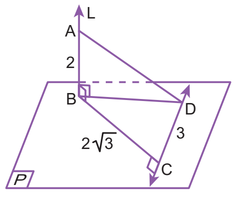
23.

I. (F) si son paralelas forman un plano.
II. (V) porque no son coplanarios.
III. (F) si son alabeadas no pasaría un plano.
IV. (V) por definición.

Clave C

Razonamiento y demostración

24.



Del gráfico:
En el ⊿BCD por el teorema de Pitágoras:
$(BD)^2 = (2\sqrt{3})^2 + (3)^2 \Rightarrow (BD)^2 = 21$



En el ◺ABD por el teorema de Pitágoras:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$

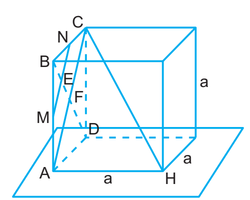
$(AD)^2 = (2)^2 + 21$

$(AD)^2 = 25$

$\therefore AD = 5$

Clave D

25. Como $\overline{MN} \mathbin{//} \overline{AC} \Rightarrow \overline{MN}$ es paralelo al plano ACH. Toda recta perpendicular al plano ACH será también perpendicular a $\overline{MN}$. En particular, $\overline{BD} \perp$ plano ACH, por ser $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AH}$. Si $\overline{BD}$ interseca a $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente, entonces EF da la mínima distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{CH}$, que es la misma que hay entre $\overline{MN}$ y el plano ACH. En el cuadrado ABCD, F es el centro:



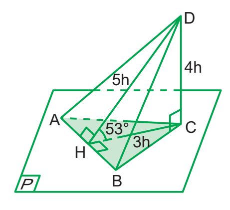
$EF = BE = \frac{BF}{2} \Rightarrow EF = \frac{BF}{2} = \frac{1}{2}(BF)$

$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{2}\right) = \frac{1}{4}(BD)$

Es decir: $EF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Clave B

26.



Por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

Sea: DH = 5h

Por dato: $A_{\triangle ABD} = 30\ m^2$

Entonces:

$\frac{(AB)(5h)}{2} = 30 \Rightarrow (AB)(h) = 12$

Piden:

$A_{\triangle ABC} = \frac{(AB)(3h)}{2} = \frac{3}{2}(AB)(h)$

$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{3}{2}(12)$

$\therefore A_{\triangle ABC} = 18\ m^2$

Clave A

Resolución de problemas

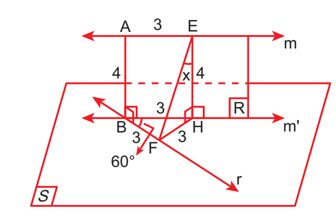
27. El máximo número de planos que determinan 30 puntos en el espacio será:

$C_3^{30} = \frac{30(30-1)(30-2)}{6} = \frac{30(29)(28)}{6} = 4060$

Por lo tanto, se pueden determinar 4060 planos.

Clave A

28. Grafiquemos: $\overleftrightarrow{r}$ está en un plano distinto a $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m'}$ es la proyección de $\overleftrightarrow{m}$ sobre S.



▱R ⊥ ▱S

Se observa que el $\triangle$ BFH es equilátero:

HF = 3 ... (1)

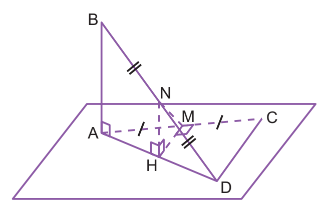
x es la medida del ángulo de cruce entre $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, ya que $\overline{EH} \mathbin{//} \overline{AB}$.

Como EH = AB $\Rightarrow$ EH = 4 ... (2)

Con (1) y (2), en ◺EHF, recto en H: x = 37°

Clave C

29.



$AB^2 + CD^2 = 256$ ... (dato).

Sean: M punto medio de $\overline{AC}$ y N, punto medio de $\overline{BD}$. Incógnita: MN.

Si H es punto medio de $\overline{AD}$

$NH = \frac{AB}{2}$ y $\overline{NH} \mathbin{//} \overline{AB}$, en $\triangle BAD$

$MH = \frac{CD}{2}$ y $\overline{MH} \mathbin{//} \overline{CD}$, en $\triangle ACD$

Por dato: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$\therefore\ \overline{MH} \perp \overline{NH}$

En el triángulo rectángulo NHM, aplicamos teorema de Pitágoras:

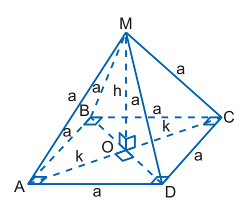
$MN^2 = MH^2 + NH^2$

$\Rightarrow MN^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2 + CD^2}{4}$

Con el dato: $\therefore MN^2 = \frac{256}{4} \Rightarrow MN = 8$

Clave B

30.



Del gráfico:

O: punto de intersección de las diagonales del cuadrado ABCD.

$\Rightarrow a\sqrt{2} = 2k \Rightarrow k = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

En el ◺MOC, por el teorema de Pitágoras:

$h^2 + k^2 = a^2$

$\Rightarrow h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$

$h^2 = \frac{a^2}{2}$

$\therefore h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Clave A

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 104) Unidad 4

1. Por el teorema de Euler sabemos:

$C + V = A + 2$

$20 + V = 30 + 2$

$\therefore V = 12$

Clave B

2. Sea a: la arista de un cubo.

$d = 2\sqrt{3}$ (dato)

$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

Piden:

$A_T = 6a^2 = 6(2)^2$

$\therefore A_T = 24\ m^2$

Clave A

3. Dato: $S = 1800°$.

Pero sabemos que:

$S = 360°\ (V - 2)$

Entonces: $360°(V - 2) = 1800° \Rightarrow V - 2 = 5$

$\Rightarrow V = 7$

Por el teorema de Euler: $C + V = A + 2$

$\Rightarrow A = C + 5$ ...(1)

Pero por dato también: $C + V + A = 28$

$\Rightarrow C + 7 + A = 28$

$\Rightarrow C + A = 21$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $C + C + 5 = 21$

$\Rightarrow 2C = 16$

$\therefore C = 8$

Clave C

4. Sabemos que: $S = 360°(V - 2)$.

Pero: $S = 3600°$

Entonces: $3600° = 360°(V - 2)$

$\Rightarrow V - 2 = 10$

$\Rightarrow V = 12$

Por dato también: $A = 2C + 2$ ... (1)

Por el Teorema de Euler: $C + V = A + 2$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2):

$C + V = 2C + 2 + 2 \Rightarrow C + 12 = 2C + 4$

$\Rightarrow C = 8$

Clave A

5. Sea a la arista de un tetraedro regular.
Se cumple:

$h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \wedge A_T = a^2\sqrt{3}$ ... (1)

Del dato: $h = 6\sqrt{6}$

Entonces:

$\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{6} \Rightarrow a = 18$

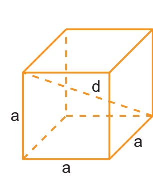
Reemplazando en (1):

$\Rightarrow A_T = 18^2\sqrt{3}$

$\therefore A_T = 324\sqrt{3}\ m^2$

Clave A

6.



Por dato: $d = \sqrt{6}$

$\Rightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Piden: el área total del cubo.

$\Rightarrow A_T = 6a^2 = 6(\sqrt{2})^2$

$\therefore A_T = 12$

Clave A

7. Sea a: la arista de un tetraedro regular.

Por dato: $a = 6$

$\Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{6\sqrt{6}}{3}$

$\therefore h = 2\sqrt{6}$

Clave A

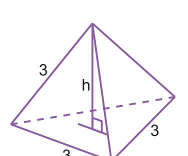
8. La sección determinada al trazar un plano secante y paralelo a una cara que pasa por el punto medio de una arista es un hexágono regular.

Luego su área será: $S = 6\left(\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore S = 6\sqrt{3}$

Clave C

9.



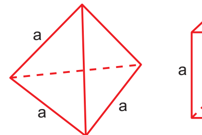
Piden la altura del tetraedro regular (h).
Sabemos:

$h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{(3)\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$

$\therefore h = \sqrt{6}$

Clave C

10.



Por dato:
El área total del tetraedro regular es $49\sqrt{3}$.

$\therefore A_T = 49\sqrt{3}$

$a^2\sqrt{3} = 49\sqrt{3} \Rightarrow a = 7$

Piden: volumen del cubo (V).

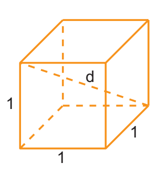
$\Rightarrow V = a^3 = (7)^3$

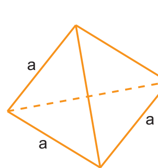
$\therefore V = 343$

Clave A

11.







Para el cubo:

$d = (1)\sqrt{3} \Rightarrow d = \sqrt{3}$

Por dato: $a = d$

$\Rightarrow a = \sqrt{3}$

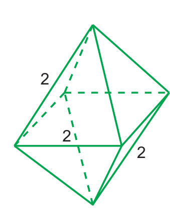
Piden: el área total del tetraedro regular.

$A_T = a^2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2\sqrt{3}$

$\therefore A_T = 3\sqrt{3}$

Clave B

12.



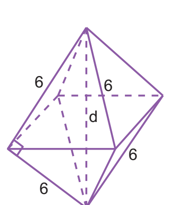
Piden:

$A_T = 2a^2\sqrt{3} = 2(2)^2\sqrt{3}$

$\therefore A_T = 8\sqrt{3}$

Clave A

13.



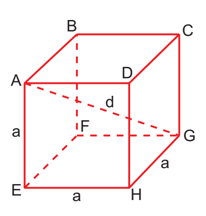
Piden: la diagonal del octaedro regular (d).

$\Rightarrow d = (6)\sqrt{2}$

$\therefore d = 6\sqrt{2}$

Clave D

14.



Un cubo presenta 4 diagonales: $\overline{AG}$, $\overline{EC}$, $\overline{BH}$ y $\overline{FD}$ de igual medida (d).

Por dato:

$4d = 8\sqrt{3} \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$

Entonces:

$a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2$

Piden:

$A_T = 6a^2 = 6(2)^2$

$\therefore A_T = 24$

Clave B

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 106) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

3.

I. (F) no tiene superficie curva.

II. (V) por definición.

III. (V) por definición.

Clave C

Razonamiento y demostración

4. Un dodecaedro regular tiene 20 vértices.

Clave C

5. Sea:

C: n.° de caras
V: n.° de vértices
A: n.° de aristas

Por dato:
$C + V + A = 32 \quad ...(1)$

Por el teorema de Euler:
$C + V = A + 2 \quad ...(2)$

Reemplazando (2) en (1):
$(A + 2) + A = 32$
$\Rightarrow 2A = 30$
$\therefore A = 15$

Clave D

6. Para calcular el número de diagonales de un octaedro regular usamos:

$N_D = C_2^V - A - \Sigma D_c \quad ...(1)$

En un octaedro regular:
$V = 6$; $C = 8$ y $A = 12$

$\Rightarrow C_2^V = C_2^6 = \dfrac{6!}{2!4!} = 15 \quad ...(2)$

El octaedro regular tiene 8 caras las cuales son triángulos equiláteros, por lo tanto, no tiene diagonales en las caras.

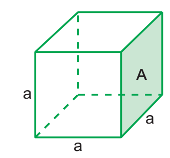
$\Rightarrow \Sigma D_C = 0 \quad ...(3)$

Reemplazando (2), (3) y el n.° de aristas en (1):
$N_D = 15 - 12 - 0$
$\therefore N_D = 3$

Clave B

Resolución de problemas

7.



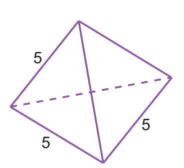
Por dato: el área de una cara del cubo es 64.

$\Rightarrow A = 64$
$a^2 = 64 \Rightarrow a = 8$

Piden:
Suma de las aristas $= 12a = 12(8)$
$\therefore$ Suma de las aristas $= 96$

Clave C

8.



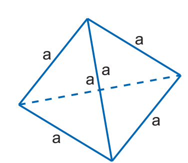
Piden: el área total del tetraedro regular.

$\Rightarrow A_T = (5)^2\sqrt{3}$

$\therefore A_T = 25\sqrt{3}$

Clave C

9.



Por dato:
$6a = 36 \Rightarrow a = 6$

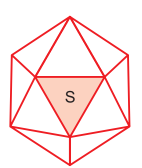
Piden: el área total del tetraedro regular.

$\Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3} = (6)^2\sqrt{3}$

$\therefore A_T = 36\sqrt{3}$

Clave A

10.



Por dato: el área de una cara del icosaedro regular es S.

Como el icosaedro regular tiene 20 caras iguales, entonces el área total (A_T) será:

$A_T = 20S$

Clave C

Nivel 2 (página 106) Unidad 4

Comunicación matemática

11.

12.

13.

I. (F) la interseca en 2 puntos.

II. (F) 20 caras.

III. (F) 8 vértices.

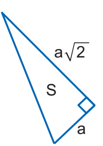
IV. (V) por definición.

Clave C

Razonamiento y demostración

14. $d = \sqrt{6} \Rightarrow a\sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Nos piden:

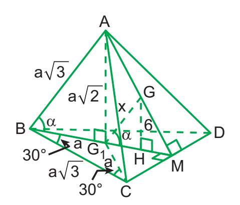


$S = \dfrac{a(a\sqrt{2})}{2}$

$\Rightarrow S = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Clave B

15.



Piden: x

En el tetraedro regular $\overline{AG_1}$ es perpendicular a la cara BCD.

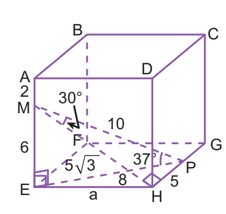
Se observa $\overline{BA} \parallel \overline{G_1G}$

Además como $\triangle BG_1A \sim \triangle G_1HG$:

$\Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow x = 3\sqrt{6}$

Clave C

16.



$\triangle$MEP; notable:

Si $ME = 6 \Rightarrow EP = 8$ y $MP = 10$

$\triangle$MHP notable:

Si $MP = 10 \Rightarrow HP = 5$ y $MH = 5\sqrt{3}$

$\triangle$MEH: $a^2 = (5\sqrt{3})^2 - 6^2 \Rightarrow a^2 = 39$

El volumen del prisma es:

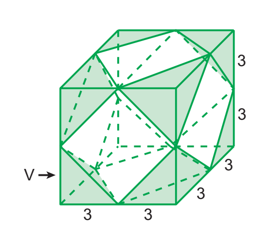
$V_p = A_B(8) \Rightarrow V_p = 39(8)$

$V_p = 312$

Clave E

Resolución de problemas

17.



El volumen de un tronco de prisma triangular recto (V) será:

$V = (A_B)\left(\frac{0+0+3}{3}\right) = \frac{3(3)}{2}(1) = \frac{9}{2}$

Sea V_x el volumen del sólido generado al unir los puntos medios de todas las aristas del cubo.

Entonces:

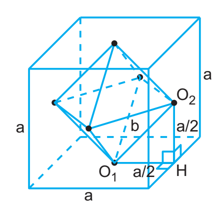
$V_{cubo} = V_x + 8V$

$6^3 = V_x + 8\left(\frac{9}{2}\right)$

$\therefore V_x = 180$

Clave A

18.



Del gráfico:

El sólido que se forma al unir los centros de las caras del cubo es un octaedro regular.

En el $\triangle O_1HO_2$: $b = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Luego:

$V_{oct.} = \frac{b^3\sqrt{2}}{3} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$

$V_{oct.} = \frac{a^3}{6} \Rightarrow V_{oct.} = \frac{V_{cubo}}{6}$

Por dato: $V_{cubo} = 120$

$\Rightarrow V_{oct.} = \frac{(120)}{6}$

$\therefore V_{oct.} = 20$

Clave A

19. Sean a y b las aristas de dos tetraedros regulares.

Piden:

$\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \frac{6a^2}{6b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ... (1)

Por dato: $b = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$\therefore \frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$

Clave A

20. Sea a: la arista de un tetraedro regular.

Por dato: $\frac{A_T}{4} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow A_T = 8\sqrt{3}$

$a^2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 8$

$\Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Piden: el volumen del tetraedro.

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(8)(2\sqrt{2})\sqrt{2}}{12}$

$\therefore V = \frac{8}{3}$

Clave E

Nivel 3 (página 107) Unidad 4

Comunicación matemática

21. I y II; II y III; IV y V

22.

I. (F) en todo poliedro convexo se cumple el teorema de Euler.

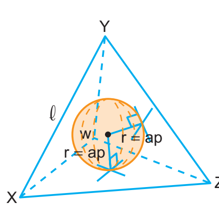
II. (V) por definición.

III. (V) cumple la regla de poliedros convexos.

IV. (F) sería en un poliedro no convexo.

Razonamiento y demostración

23. Paso 1: del tetraedro X-YWZ



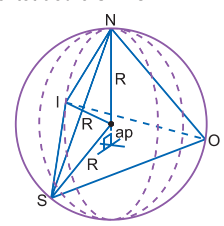
$\therefore R = ap = \frac{\ell\sqrt{6}}{12}$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\Rightarrow V_{esfera}$ inscrita en X-YWZ $= \frac{4\pi\ell^3(6)\sqrt{6}}{(3)12^3}$

$= \frac{\pi\ell^3\sqrt{6}}{216}$

Paso 2: del tetraedro S-NIO



Se sabe que la altura es:

$h = R + ap$

Donde: h: altura
R: radio
ap: apotema

De la teoría

$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $ap\frac{a\sqrt{6}}{12}$; R = ?

$R = h - ap = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow V_{esfera}$ circunscrita S-NIO $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \frac{4}{3}\pi\frac{a^3 6\sqrt{6}}{4^3}$

$= \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$

Paso 3: Se sabe de poliedros conjugados:

$\ell = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3\ell$

$\therefore \frac{V_{esfera} \text{ inscrita en X-YWZ}}{V_{esfera} \text{ circunscrita en S-NIO}} = \frac{\frac{\pi\ell^3\sqrt{6}}{216}}{\frac{\pi(3\ell)^3\sqrt{6}}{8}}$

$= \frac{1}{729}$

Clave C

24. Paso 1:

El volumen del hexaedro ABCD-EFGH

$V_{\square} = a^3$

Paso 2:

El volumen del octaedro J-IMKN-L

$V_{\diamond} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{3}$

Paso 3:

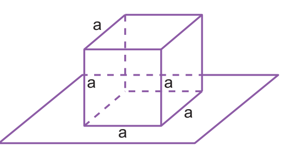
Por poliedros conjugados sabemos:

$\ell = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \frac{V_{\square}}{V_{\diamond}} = \frac{a^3}{\frac{a^3 2\sqrt{2}}{27}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{81}{4}$

Clave B

25. Según el enunciado, tenemos un cubo con a cm de arista, como se muestra en la imagen siguiente:



Se nos pide hallar el perímetro del triángulo ABC: $2p_{\triangle ABC}$

Sabemos por el enunciado que la arista del cubo mide a cm.

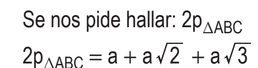
Ya que el $\triangle$ ADC es notable 45°, se determina: $AC = a\sqrt{2}$.

En el $\triangle$CAB se aplica el teorema de Pitágoras:

$(BC)^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$

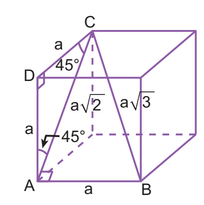
$BC = a\sqrt{3}$

Se nos pide hallar: $2p_{\triangle ABC}$



$2p_{\triangle ABC} = a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2p_{\triangle ABC} = a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$

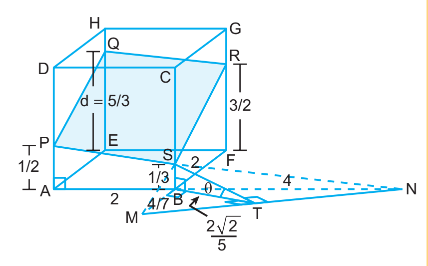


Se concluye que: $2p_{\triangle ABC}$: $a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm

Clave B

26. Piden $\mathbb{S}$.

Del gráfico



$\triangle PAN \sim \triangle SBN$

$$\frac{BN}{BN+2} = \frac{1/3}{1/2} \Rightarrow BN = 4$$

$\triangle MBS \sim \triangle MFR$

$$\frac{MB}{MB+2} = \frac{1/3}{3/2} \Rightarrow MB = \frac{4}{7}$$

En el $\triangle SBT$:

$$(ST)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 \Rightarrow ST = \frac{\sqrt{97}}{15}$$

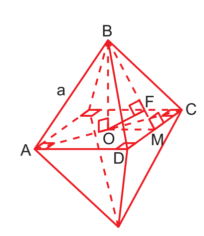
$$\mathbb{A}_{\square BAEF} = \mathbb{A}_{\square SPQR}(\cos\theta)$$

$$2^2 = \mathbb{S}\left(\frac{\frac{2\sqrt{2}}{5}}{\frac{\sqrt{97}}{15}}\right) \Rightarrow \mathbb{S} = \frac{\sqrt{194}}{3} \Rightarrow \mathbb{S} = 4{,}64 \text{ cm}^2$$

Clave A

Resolución de problemas

27.



OF = ?

Las diagonales de un octaedro regular son congruentes.

(Esto es fácil demostrar).

$$AO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$OM = \frac{a}{2}$$

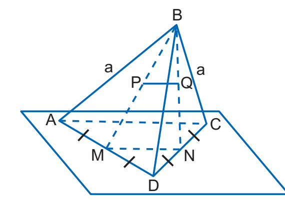
En $\triangle MOB$: $$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OM)^2}$$

$$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\therefore OF = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Clave A

28. Sea ABCD el tetraedro.



P baricentro del $\triangle ABD$

Q baricentro del $\triangle DBC$

$\triangle PBQ \sim \triangle MBN$:

$$\frac{PQ}{MN} = \frac{BP}{BM} \quad \text{... (1)}$$

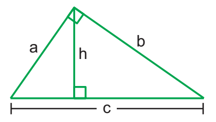
Siendo: $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$ (en $\triangle ABC$) y

$\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{2}{3}$ (baricentro)

En (1): $\dfrac{PQ}{a/2} = \dfrac{2}{3} \quad \therefore PQ = \dfrac{a}{3}$

Clave B

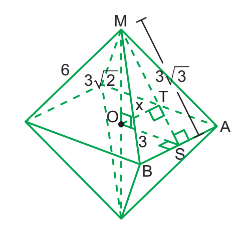
29. Recordamos que:



Según el gráfico, se cumple que

ab = ch

Nos piden hallar la distancia del centro a una cara.



Sea O: centro del octaedro

$OM = 3\sqrt{2}$

Teorema (3 perpendiculares)

$\overline{MO} \perp \overline{OS} \wedge \overline{MS} \perp \overline{AB}$

$\Rightarrow \overline{OT} \perp \triangle AMB$

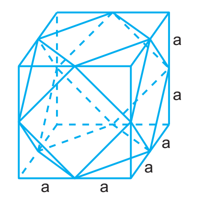
$\Rightarrow$ OT: distancia del centro a una cara

OT = x

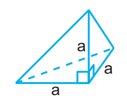
En el $\triangle MOS$: $3(3\sqrt{2}) = 3\sqrt{3}\,x \Rightarrow x = \sqrt{6}$ m

Clave B

30. Se tiene un hexaedro regular:



Del cual se aprecia la siguiente pirámide:



Por teoría se determina que el volumen del hexaedro regular es $(2a)^3 = 8a^3$.

Para hallar el volumen del poliedro debemos restar del volumen del cubo, 8 veces el volumen de la pirámide, así tendríamos que:

$$V_{poliedro} = 8a^3 - 8\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a\right) = \frac{5}{6}(8a^3)$$

Entonces:

$$\frac{\text{Volumen del poliedro}}{\text{Volumen del hexaedro}} = \frac{5}{6}$$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 109) Unidad 4

1. Piden: x

Dato: $A_{ST} = 52\ m^2$

Sabemos: $A_{ST} = 2(ab + ac + bc)$

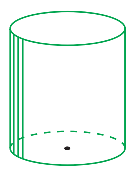
$\Rightarrow 52 = 2(4(3) + 4x + 3x)$

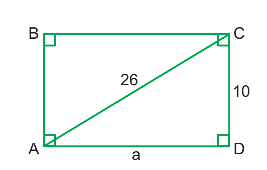
$7x = 14$

$\therefore x = 2\ m$

Clave B

2.





Aplicando el teorema de Pitágoras en el ⊿ADC:

$26^2 = a^2 + 10^2$

$676 = a^2 + 100 \Rightarrow a^2 = 576$

$\Rightarrow a = 24$

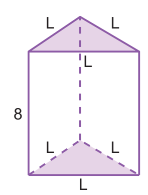
Piden:

$A_{SL} = A_{\square ABCD} = a10 = (24)10$

$\therefore A_{SL} = 240\ cm^2$

Clave C

3.



Dato:

$V = 32\sqrt{3}\ m^3$ ... (1)

Sabemos que:

$V = (A_{base})h$

$V = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}8 = 2L^2\sqrt{3}$ ... (2)

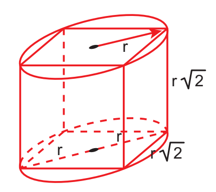
Igualando (1) y (2):

$2L^2\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$

$\Rightarrow L = 4\ m$

Clave C

4.



Sea r: radio de la base del cilindro.

Observamos que:

Lado del cubo $= r\sqrt{2}$

Altura del cilindro $= r\sqrt{2}$

Entonces:

A_{SL} del cilindro $= A_1 = 2\pi r(r\sqrt{2})$

$A_1 = 2\sqrt{2}\,\pi r^2$ ...(1)

A_L del cubo $= A_2 = 4(r\sqrt{2})^2$

$A_2 = 8r^2$ ...(2)

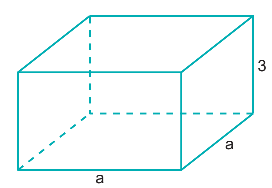
Luego, la relación de áreas es:

(2) : (1)

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{8r^2}{2\sqrt{2}\,\pi r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

Clave A

5.



Por dato: $A_{SL} = 60$

Entonces:

$4(3a) = 60 \Rightarrow a = 5$

Piden: el volumen del prisma (V)

$V = A_Bh = a^23 = 5^2(3)$

$\therefore V = 75$

Clave E

6. Por dato:

- $A_{ST} = 100\pi\ m^2$ ... (1)
- $r + g = 25$ ... (2)

De (1):

$2A_{base} + A_{SL} = 100\pi$

$2\pi r^2 + 2\pi rg = 100\pi$

Luego:

$r\underbrace{(r + g)}_{25} = 50 \Rightarrow r = 2$

Reemplazando en (2):

$2 + g = 2 \Rightarrow g = 23$

Piden el volumen del cilindro (V):

$V = \pi r^2h = \pi 2^2(g) = 4\pi(23)$

$\therefore V = 92\pi\ m^3$

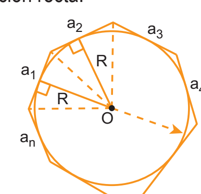
Clave A

7. Por dato: $A_{SL} = S$

$2p_{SR})a_L = S$

$\Rightarrow a_L = \frac{S}{2p_{SR}}$

Sea la sección recta:



Entonces:

$A_{SR} = \frac{a_1R}{2} + \frac{a_2R}{2} + \frac{a_3R}{2} + ... + \frac{a_nR}{2}$

$A_{SR} = \frac{R}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$\Rightarrow A_{SR} = \frac{R}{2}(2p_{SR})$

Piden: el volumen del prisma oblicuo (V).

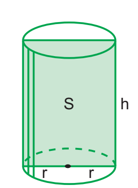
$V = (A_{SR})a_L$

$\Rightarrow V = \frac{R}{2}(2p_{SR}) \cdot \frac{S}{2p_{SR}} = \frac{R}{2}S$

$\therefore V = \frac{SR}{2}$

Clave C

8.



Por dato: $2rh = S \Rightarrow rh = \frac{S}{2}$

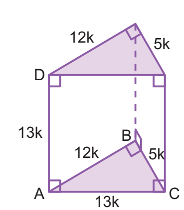
Piden:

$A_{SL} = 2\pi r \cdot h = 2\pi\left(\frac{S}{2}\right)$

$\therefore A_{SL} = \pi S$

Clave B

9.



$\frac{BC}{5} = \frac{AB}{12} = \frac{AD}{13} = k$

Por dato el volumen del prisma es: $V = 390$

$\Rightarrow (A_{base})h = 390$

$\frac{(5k)(12k)}{2}13k = 390$

$390k^3 = 390$

$k = 1$

Por el teorema de Pitágoras: $AC = 13$

Calculamos el área lateral:

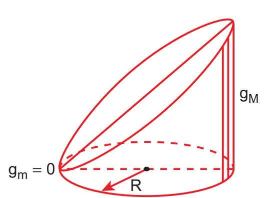
$A_{SL} = (13)(13) + (13)(12) + (5)(13)$

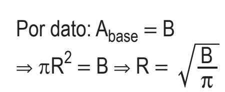
$= 169 + 156 + 65$

$\therefore A_S = 390\ m^2$

Clave C

10.

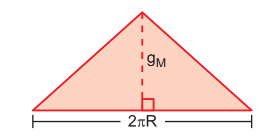




Por dato: $A_{base} = B$

$\Rightarrow \pi R^2 = B \Rightarrow R = \sqrt{\dfrac{B}{\pi}}$

Además, el desarrollo de su superficie lateral:



$\Rightarrow A_{SL} = \dfrac{2\pi R g_M}{2} = S \quad ...(\text{dato})$

$\pi R g_M = S$

$\Rightarrow g_M = \dfrac{S}{\pi R}$

Piden: el volumen del tronco de cilindro recto (V)

$V = (A_{base})\left(\dfrac{g_m + g_M}{2}\right)$

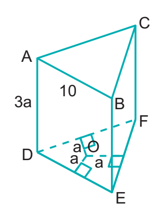
$\Rightarrow V = (\pi R^2)\left(\dfrac{0 + g_M}{2}\right) = \dfrac{\pi R^2}{2}(g_M)$

$\Rightarrow V = \dfrac{\pi R^2}{2}\left(\dfrac{S}{\pi R}\right) = \dfrac{S}{2}(R)$

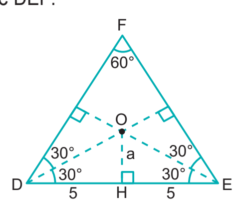
$\therefore V = \dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{B}{\pi}}$

Clave B

11.



En la base DEF:



Del ⊿DHO notable de 30° y 60°:

$a = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

Luego el área de la base:

$A_B = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

Piden: el volumen del prisma (V).

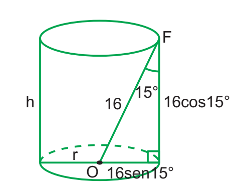
$V = (A_B)h = (A_B)(3a)$

$\Rightarrow V = (25\sqrt{3})(3)\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)$

$\therefore V = 375$

Clave E

12.



Piden:

$A_{SL} = 2\pi rh = 2\pi(16\text{sen}15°)(16\cos 15°)$

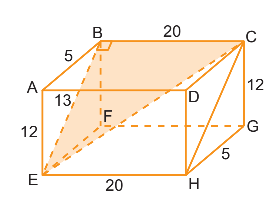
$A_{SL} = 16^2\pi(\underbrace{2\text{sen}15°\cos 15°}_{\text{sen}30°})$

$A_{SL} = 16^2\pi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 128\pi$

$\therefore A_{SL} = 128\pi\ m^2$

Clave C

13.



Por dato: ABCD–EFGH es un paralelepípedo.

Entonces:

$\overline{BC} \perp$ ▱ABFE $\Rightarrow m\angle EBC = 90°$

En el ⊿BAE por el teorema de Pitágoras: EB = 13

Piden:

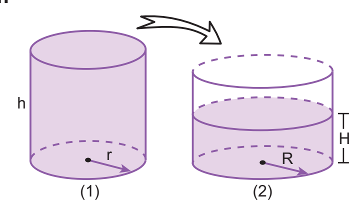
El área de la región sombreada ($A_{somb.}$).

$A_{somb.} = \dfrac{(EB)(BC)}{2} = \dfrac{(13)(20)}{2}$

$\therefore A_{somb.} = 130$

Clave D

14.



Por dato: $2r = d \quad \wedge \quad 2R = 2d$

$\Rightarrow r = \dfrac{d}{2} \qquad \Rightarrow R = d$

Luego, se cumple que ambos volúmenes deben ser iguales:

$\Rightarrow V_{(1)} = V_{(2)}$

$\pi r^2 h = \pi R^2 H$

$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 h = (d)^2 H$

$\Rightarrow \dfrac{d^2 h}{4} = d^2 H$

$\therefore H = \dfrac{h}{4}$

Clave A

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 111) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3. Por dato: V = 60

$\Rightarrow V = x(x + 1)(x - 1)$

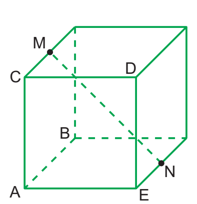
$60 = (x - 1)(x)(x + 1)$

$3(4)5 = (x - 1)(x)(x + 1)$

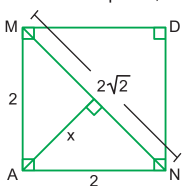
Comparando: x = 4

Clave E

4.



Si observamos frontalmente desde la cara ACDE, se observa a $\overline{AB}$ como un punto, entonces:



Por relaciones métricas en el ⊿MAN:

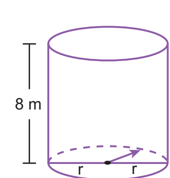
AM(AN) = MN(x)

$2(2) = x(2\sqrt{2})$

$\therefore x = \sqrt{2}$

Clave A

5.



Por dato: $2r = 8 \quad \Rightarrow r = 4$ m

Piden: el volumen del cilindro (V)

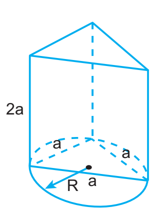
$V = A_{base}\,h = \pi r^2 h$

$V = \pi\, 4^2\,(8) \Rightarrow V = 128\pi\ m^3$

Clave B

Resolución de problemas

6.



Por dato: R = 10 cm

Por polígonos regulares:

$a = \ell_3 \Rightarrow a = R\sqrt{3} \qquad ...(1)$

Piden: el volumen del prisma (V)

$V = (A_B)h$

$V = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)(2a) = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} \qquad ...(2)$



Reemplazado (1) en (2):

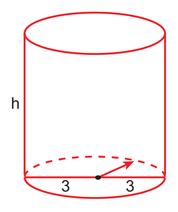
$$V = \frac{(R\sqrt{3})^3\sqrt{3}}{2} = \frac{9R^3}{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{9(10)^3}{2} = 4500$$

$\therefore V = 4500\ cm^3$

Clave B

7.



Por dato: $g = 6 \Rightarrow h = 6$

Luego:

$A_{ST} = 2A_{base} + A_{SL}$

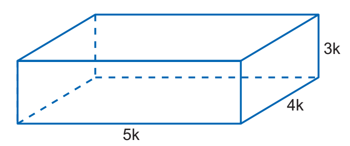
$A_{ST} = 2(\pi 3^2) + (2\pi 3)6$

$A_{ST} = 18\pi + 36\pi$

$\therefore A_{ST} = 54\pi\ cm^2$

Clave D

8.



Por dato: $A_{ST} = 282$

Entonces:

$25k(4k) + 5k(3k) + 4k(3k) = 282$

$2(20k^2 + 15k^2 + 12k^2) = 282$

$94k^2 = 282$

$k^2 = 3$

$\Rightarrow k = \sqrt{3}$

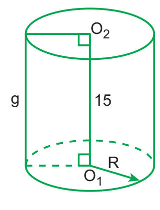
Piden: el volumen del paralelepípedo (V)

$\Rightarrow V = 5k(4k)(3k) = 60k^3 = 60(\sqrt{3})^3$

$\therefore V = 60(3\sqrt{3}) = 180\sqrt{3}$

Clave B

9.



Por dato: el desarrollo de su superficie lateral tiene un área de $180\pi\ m^2$.

$\Rightarrow A_{SL} = 180\pi\ m^2$

$2\pi Rg = 180\pi$

$Rg = 90 \quad ...(1)$

Del gráfico: $g = 15$

Reemplazando en (1):

$R(15) = 90$

$\Rightarrow R = 6$

Piden: el volumen del cilindro recto (V)

$V = (\pi R^2)g = \pi(6)^2(15)$

$\Rightarrow V = 36\pi(15)$

$\therefore V = 540\pi\ m^3$

Clave A

Nivel 2 (página 112) Unidad 4

Comunicación matemática

10.

I. (F) por definición.

II. (F) no se intersecan.

III. (F) no es curva.

IV. (V) por definición.

Clave B

11.

I. (V), sean las bases convexas o no convexas.

II. (F), son paralelogramos.

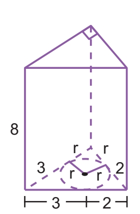
III. (V), el rectángulo es un paralelogramo.

IV. (V), por definición.

Clave A

Razonamiento y demostración

12.



Por el teorema de Pitágoras:

$5^2 = (3 + r)^2 + (r + 2)^2$

$25 = 9 + 6r + r^2 + r^2 + 4r + 4$

$0 = 2r^2 + 10r - 12$

$0 = r^2 + 5r - 6$

$r \quad +6$

$r \quad -1 \Rightarrow r = 1$

Piden: el volumen del prisma (V)

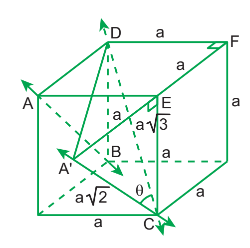
$V = A_B h$

$$V = \frac{(3 + r)(r + 2)}{2}(8) = \frac{(3 + 1)(1 + 2)8}{2}$$

$\therefore V = 48$

Clave B

13.



Trazamos $\overleftrightarrow{A'C} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por el vértice C, tal que: $AB = A'C$.

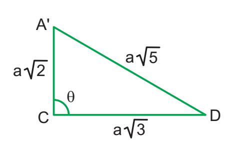
Luego en el ⊿CEA': $A'E = a$

$\overline{CD}$ es la diagonal del cubo: $CD = a\sqrt{3}$

En el ⊿DFA:

por el teorema de Pitágoras: $A'D = a\sqrt{5}$

En el $\triangle A'CD$:



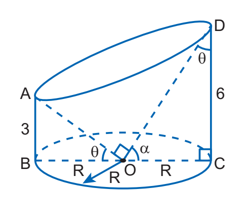
Cumple el teorema de Pitágoras:

$(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3})^2 = (a\sqrt{5})^2$

$\therefore \theta = 90°$

Clave E

14.



En el ⊿OCD: $\alpha + \theta = 90°$

Luego: el ⊿ABO ~ ⊿OCD

$$\Rightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{DC}{OC} \Rightarrow \frac{R}{3} = \frac{6}{R} \Rightarrow R^2 = 18$$

Piden: el volumen del tronco de cilindro circular recto (V)

$$V = (A_{base})\left(\frac{AB + DC}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V = (\pi R^2)\left(\frac{3 + 6}{2}\right)$$

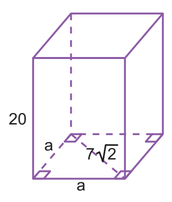
$$V = \pi(18)\left(\frac{9}{2}\right)$$

$\therefore V = 81\pi\ m^3$

Clave E

Resolución de problemas

15.



En la base: $a\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 7$

Piden: área lateral del prisma cuadrangular regular.

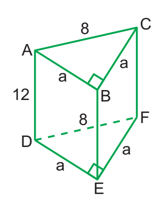
$A_{SL} = (2p_{base})h$

$\Rightarrow A_{SL} = (4a)(20) = (4)(7)(20)$

$\therefore A_{SL} = 560$

Clave B

16.



En el ◺DEF: $a\sqrt{2} = 8$

$\Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

Piden: el volumen del prisma (V).

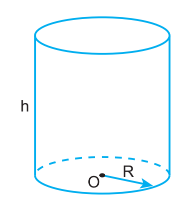
$V = (A_B)h = \left(\frac{a.a}{2}\right)h$

$\Rightarrow V = \frac{(4\sqrt{2})(4\sqrt{2})}{2}(12) = 192$

$\therefore V = 192\ cm^3$

Clave A

17.



Por dato:

$\frac{V}{A_{SL}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\pi R^2 h}{2\pi Rh} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2}$

Además:

$A_{base} = \frac{3}{2}(A_{SL})$

$\Rightarrow \pi R^2 = \frac{3}{2}(2\pi Rh)$

$R = 3h$

$\frac{1}{2} = 3h$

$\therefore h = \frac{1}{6}$

Clave D

Nivel 3 (página 113) Unidad 4

Comunicación matemática

18.

I. (F) tienen igual área.

II. (V) la base de un prisma es un polígono, y un polígono siempre está inscrito en una línea curva.

III. (F) solo tiene líneas curvas.

IV. (F) la directriz solo es poligonal.

19.

I. (V) por definición.

II. (F) solo tiene superficies planas.

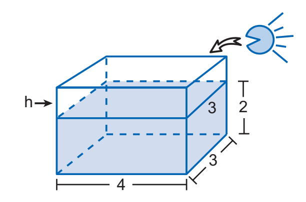
III. (F) tiene superficie cilíndrica.

IV. (F) tiene superficie poligonal.

Clave D

Razonamiento y demostración

20.



Por dato: el agua está a 2/3 de la altura del paralelepípedo.

$\Rightarrow \frac{2}{3}(h + 2) = 2$

$(h + 2) = 3 \Rightarrow h = 1$

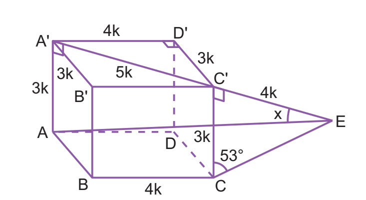
Luego se introduce el trozo y está a punto de rebalsar, entonces se cumple:

$V_{sólido} = 4(3)h = 4(3)(1)$

$\therefore V_{sólido} = 12$

Clave D

21.



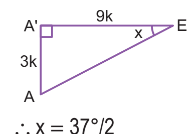
Por dato: las aristas del prisma recto son proporcionales a 3; 3 y 4.

Además: AA' = A'B'

En el ◺A'D'C' notable: A'C' = 5k

En el ◺CC'E notable: C'E = 4k

Luego en el ◺AA'E:

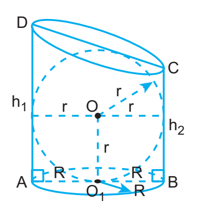


A' 3a E
37°/2
a
A

$\therefore x = 37°/2$

Clave D

22.



Por dato: DC = 5 cm ∧ $A_{esfera} = 9\pi\ cm^2$

$\Rightarrow 4\pi r^2 = 9\pi \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

Del gráfico: R = r ∧ AB = 2R

En el trapecio ADCB por el teorema de Pitot:

$h_1 + h_2 = DC + AB = (5) + (2R)$

$\Rightarrow h_1 + h_2 = 5 + 2(r) = 5 + 2\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow h_1 + h_2 = 8$

Piden: el volumen del tronco de cilindro recto (V)

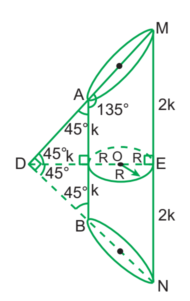
$V = (A_{base})\left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$

$\Rightarrow V = \pi R^2\left(\frac{8}{2}\right) = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2(4)$

$\therefore V = 9\pi\ cm^3$

Clave B

23.



Por dato: $A_{SL} = V$

$\Rightarrow (2\pi R)\left(\frac{AB + MN}{2}\right) = (\pi R^2)\left(\frac{AB + MN}{2}\right)$

$2\pi R = \pi R^2$

$\Rightarrow R = 2$

Además: MN = 2AB ∧ AM = BN

Entonces: ABNM es un trapecio isósceles

Luego en el ◺DEM, notable de 45°:

DE = ME ⇒ k + 2R = 2k ⇒ k = 2R

Piden: el área lateral del tronco de cilindro.

$A_{SL} = (2p_{SR})\left(\frac{g_M + g_m}{2}\right)$

$A_{SL} = (2\pi R)\left(\frac{MN + AB}{2}\right) = (2\pi R)\left(\frac{4k + 2k}{2}\right)$

$A_{SL} = (2\pi R)(3k) = 2\pi R(3)(2R)$

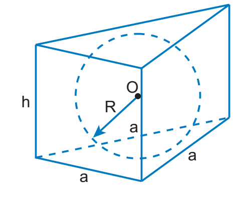
$\Rightarrow A_{SL} = 12\pi R^2 = 12\pi(2)^2$

$\therefore A_{SL} = 48\pi$

Clave C

Resolución de problemas

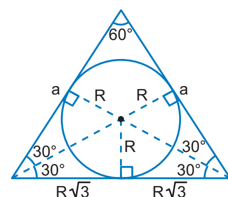
24.



Por dato: 2R = 6 ⇒ R = 3

Del gráfico: h = 2R

Luego, en la base empleando una vista superior:





Entonces:
$a = 2R\sqrt{3}$

Piden: el volumen del prisma (V)
$V = (A_B)h$

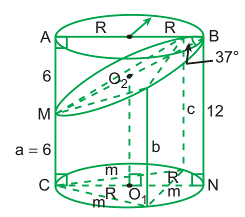
$V = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)(2R) = \dfrac{(2R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}(2R)$

$\Rightarrow V = 6R^3\sqrt{3} = 6(3)^3\sqrt{3}$

$\therefore V = 162\sqrt{3}$

Clave A

25.



Del $\triangle$BAM notable de 37° y 53°:
$2R = 8 \Rightarrow R = 4$

Luego, en la base inferior por polígonos regulares: $m = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow m = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow A_{base} = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A_{base} = 12\sqrt{3}$

Piden: el volumen del tronco de prisma triangular regular (V)

$V = (A_{base})\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$

$\Rightarrow V = (12\sqrt{3})\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$ ...(1)

Por propiedad: $O_1O_2 = \dfrac{a+b+c}{3}$

En el trapecio MBNC: se cumple que $\overline{O_1O_2}$ es su mediana.

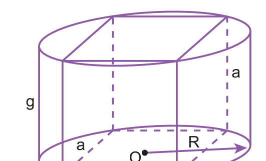
$\Rightarrow O_1O_2 = \dfrac{6+12}{2} = 9$

$\therefore \dfrac{a+b+c}{3} = 9$ ...(2)

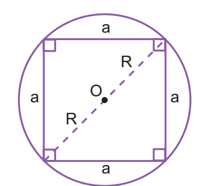
Reemplazando (2) en (1):
$\Rightarrow V = (12\sqrt{3})(9)$
$\therefore V = 108\sqrt{3}$

Clave C

26.



Del gráfico: g = a
En la base:



$\Rightarrow 2R = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Luego, para el cilindro de revolución:
$A_{ST} = A_{SL} + 2A_{base}$
$A_{ST} = 2\pi Rg + 2(\pi R^2)$

$A_{ST} = 2\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)(a) + 2\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\Rightarrow A_{ST} = \pi a^2\sqrt{2} + \pi a^2$

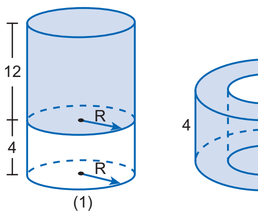
Piden:

$\dfrac{A_{T(cubo)}}{A_{ST(cilin.)}} = \dfrac{6a^2}{\pi a^2\sqrt{2} + \pi a^2} = \dfrac{6a^2}{\pi a^2(\sqrt{2}+1)}$

$\therefore \dfrac{A_{T(cubo)}}{A_{ST(cilin.)}} = \dfrac{6}{(\sqrt{2}+1)\pi}$

Clave A

27.



Por dato:
En el caso (1) para el volumen:
$\pi R^2(4) + x = \pi R^2(16)$
$\Rightarrow x = 12\pi R^2$ ...(α)

En el caso (2) para el volumen:
$\pi R^2(4) + x = \pi(R+12)^2(4)$
$\Rightarrow x = 96\pi(R+6)$ ...(β)

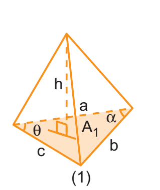
De (α) y (β):
$12\pi R^2 = 96\pi(R+6)$
$R^2 = 8(R+6) \Rightarrow R^2 - 8R - 48 = 0$
$(R-12)(R+4) = 0$
$\Rightarrow R = 12 \lor R = -4$
$\therefore R = 12$ m

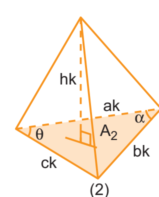
Clave D

PIRÁMIDE Y CONO

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 114) Unidad 4

1.





Por dato: las pirámides son semejantes.

Además: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{9}{16}$

Entonces:

$$\frac{\frac{ab}{2}\text{sen}\alpha}{\frac{(ak)(bk)}{2}\text{sen}\alpha} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{3}{4}$$

Piden:

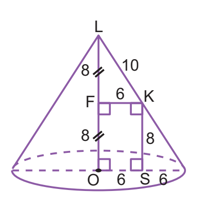
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}(A_1)h}{\frac{1}{3}(A_2)(hk)} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{27}{64}$$

Clave B

2.



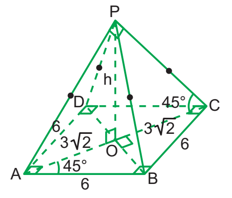
Piden: el volumen del cono (V)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi (12)^2\, 16$$

$\therefore V = 768\pi \text{ m}^3$

Clave D

3.



Por dato: P-ABCD es una pirámide regular, entonces las aristas laterales tienen igual medida.

En el ⊿ABC notable de 45°: $AC = 6\sqrt{2}$

El ⊿APC resulta ser notable de 45°.

$\Rightarrow PO = OC$

$h = 3\sqrt{2}$

Piden: el volumen de la pirámide (V)

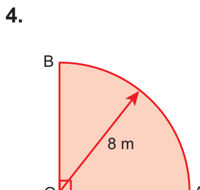
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(6^2)(3\sqrt{2})$$

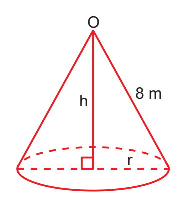
$$\Rightarrow V = \frac{(36)3\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore V = 36\sqrt{2} \text{ m}^3$$

Clave A

4.





Sabemos:

$L_{\overset{\frown}{AB}} = 2\pi r$

$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)8 = 2\pi r \Rightarrow r = 2$

Por el teorema de Pitágoras:

$8^2 = r^2 + h^2$

$8^2 = (2)^2 + h^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{15}$

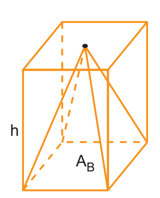
Piden: el volumen del cono (V)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2)^2(2\sqrt{15})$$

$$\therefore V = \frac{8\pi}{3}\sqrt{15} \text{ m}^3$$

Clave C

5.



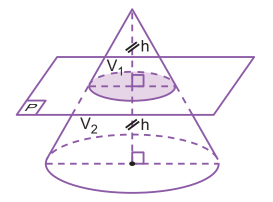
Piden:

$$\frac{V_{prisma}}{V_{pirámide}} = \frac{A_B h}{\frac{1}{3}A_B h} = 3$$

$$\therefore \frac{V_{prisma}}{V_{pirámide}} = 3$$

Clave C

6.



Por semejanza de conos:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{(h)^3}{(2h)^3} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 8V_1 = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 = 7V_1$$

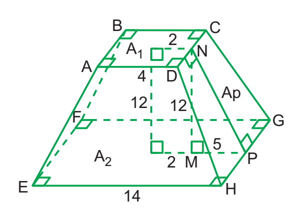
Piden:

$$\frac{V_1 + V_2}{V_2} = \frac{V_1 + (7V_1)}{(7V_1)} = \frac{8V_1}{7V_1}$$

$$\therefore \frac{V_1 + V_2}{V_2} = \frac{8}{7}$$

Clave A

7.



En el ⊿NMP por el teorema de Pitágoras:

$(Ap)^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow Ap = 13$

Luego, calculamos los semiperímetros de las bases:

$$p_1 = \frac{4+4+4+4}{2} = 8$$

$$p_2 = \frac{14+14+14+14}{2} = 28$$

Piden: el área total del tronco de pirámide

$A_T = A_L + A_1 + A_2$

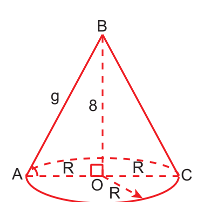
$\Rightarrow A_T = (p_1 + p_2)A_P + 4^2 + 14^2$

$A_T = (8 + 28)13 + 16 + 196$

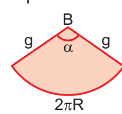
$\therefore A_T = 680 \text{ m}^2$

Clave D

8.



Desarrollando la superficie lateral del cono:



Por dato: $\alpha = 120°$

$\Rightarrow \left(\dfrac{R}{g}\right)360° = 120°$

$\Rightarrow \dfrac{R}{g} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow R = k \;\wedge\; g = 3k$

En el ⊿BOA por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = R^2 + 8^2$

$\Rightarrow (3k)^2 = (k)^2 + 64$

$8k^2 = 64$

$\Rightarrow k = 2\sqrt{2}$

Piden: el volumen del cono (V)

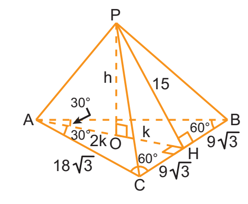
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi k^2)(8)$$

$$\Rightarrow V = \frac{8\pi}{3}k^2 = \frac{8\pi}{3}(2\sqrt{2})^2$$

$$\therefore V = \frac{64\pi}{3} \text{ m}^3$$

Clave B

9.



Del gráfico: O es el centro de la base, además se cumple que O es el incentro y baricentro del $\triangle ABC$ equilátero.

En el ⊿AHB notable de 30° y 60°:
$3k = 27 \Rightarrow k = 9$

En el ⊿POH por el teorema de Pitágoras:
$h^2 + k^2 = 15^2$
$\Rightarrow h^2 + (9)^2 = 225 \Rightarrow h = 12$

Piden:

El volumen de la pirámide regular (V)

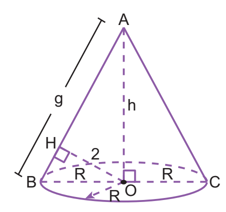
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}\left[\frac{(18\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right](12)$$

$$\Rightarrow V = \frac{11\,664\sqrt{3}}{12} = 972\sqrt{3}$$

$\therefore V = 972\sqrt{3}\ m^3$

Clave A

10.



Por dato: $A_L = 9\ cm^2$
$\Rightarrow \pi Rg = 9$ ...(1)

En el ⊿AOB por relaciones métricas:
$(h)(R) = (2)(g) \Rightarrow g = \frac{hR}{2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):
$\pi R\left(\frac{hR}{2}\right) = 9 \Rightarrow \pi R^2 h = 18$

Piden: el volumen del cono (V)

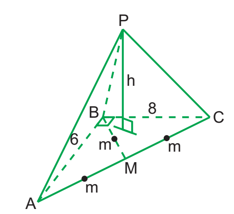
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2 h)$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(18) = 6$$

$\therefore V = 6\ cm^3$

Clave B

11.



En el ⊿ABC por el teorema de Pitágoras: AC = 10
Por propiedad: BM = AM = MC = m

$\Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5$

Por dato: $h = m \Rightarrow h = 5$

Piden: el volumen de la pirámide (V)

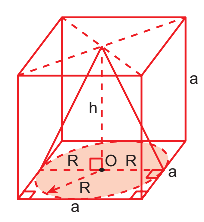
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}\left(\frac{AB.BC}{2}\right)5$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{6.8}{2}\right)5 = 40$$

$\therefore V = 40\ m^3$

Clave B

12.



Del gráfico: $a = 2R \wedge h = a \Rightarrow h = 2R$

Por dato: el área de la proyección del cono sobre la base del cubo mide $9\pi\ m^2$.
$\Rightarrow \pi R^2 = 9\pi$
$R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$

Piden: el volumen del cubo (V)

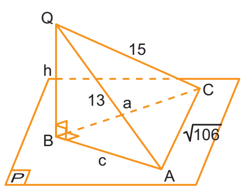
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(2R)$$

$$\Rightarrow V = \frac{2\pi}{3}R^3 = \frac{2\pi}{3}(3)^3 = 18\pi$$

$\therefore V = 18\pi\ m^3$

Clave A

13.



Por el teorema de Pitágoras:
$a^2 + c^2 = 106$ ...(1)
$h^2 + a^2 = 225$ ...(2)
$h^2 + c^2 = 169$ ...(3)

Sumando las tres expresiones tenemos:
$2(a^2 + c^2 + h^2) = 500$
$\Rightarrow a^2 + c^2 + h^2 = 250$ ...(4)

Reemplazando (1) en (4):
$\Rightarrow (106) + h^2 = 250$
$h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

De (2): $(12)^2 + a^2 = 225$
$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

De (3): $(12)^2 + c^2 = 169$
$c^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

Piden:
El volumen de la pirámide Q–ABC (V)

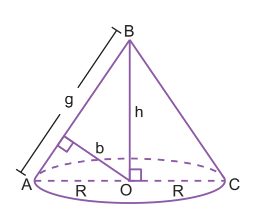
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}\left(\frac{a.c}{2}\right)h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{9.5}{2}\right)(12) = 90$$

$\therefore V = 90\ m^3$

Clave E

14.



Por dato:
$A_L = a$
$\Rightarrow \pi Rg = a$ ... (1)

En el ⊿AOB por relaciones métricas:
$Rh = gb$ ... (2)

Multiplicando (1) y (2):
$\pi R^2 hg = gab \Rightarrow \pi R^2 h = ab$

Piden: El volumen del cono (V)

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}(ab)$$

$\therefore V = \frac{ab}{3}$

Clave E

PRACTIQUEMOS

Nivel 1 (página 116) Unidad 4

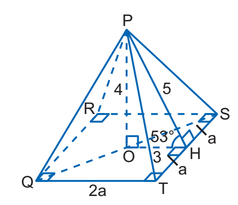
Comunicación matemática

1.

2.

Razonamiento y demostración

3.



El ⊿POH es notable de 37° y 53°.
Entonces: $OH = 3 \wedge PH = 5$

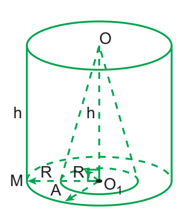
En el ⊿QTS, por base media:

$OH = \frac{QT}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2a}{2} \Rightarrow a = 3$

Piden: el área total de la pirámide
$A_T = A_L + A_B$
$\Rightarrow A_T = (4a)(5) + (2a)^2 = 20(3) + 4(3)^2$
$\therefore A_T = 96\ cm^2$

Clave E

4.



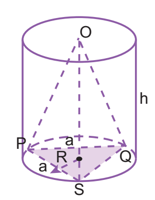
Por dato: $MA = AO_1 = R$

Piden:

$$\frac{V_{cono}}{V_{cilin.}} = \frac{\frac{\pi R^2 h}{3}}{\pi(2R)^2 h} = \frac{\pi R^2}{12\pi R^2} \quad \therefore \frac{V_{cono}}{V_{cilin.}} = \frac{1}{12}$$

Clave A

5.



Del gráfico: ambos sólidos tienen la misma altura (h)

En el △PQS por polígonos regulares:
$a = R\sqrt{3}$

Sea V_1: el volumen de la pirámide regular.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)h$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{12}$$

Sea V_2: el volumen del cilindro recto

$$\Rightarrow V_2 = \pi R^2 h$$

Piden:

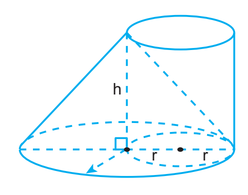
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(\frac{a^2 h\sqrt{3}}{12}\right)}{\pi R^2 h} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12\pi R^2} = \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{12\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{12\pi R^2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$$

Clave A

6.



Por dato:

$V_{cilindro} = 30\ cm^3 \Rightarrow \pi r^2 h = 30$

Piden:

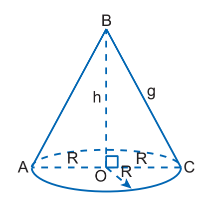
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h = \frac{4}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}(30)$$

$$\therefore V_{cono} = 40\ cm^3$$

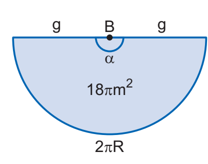
Clave C

Resolución de problemas

7.



El desarrollo de su superficie lateral es por dato:



Entonces: $\alpha = 180°$

$$\Rightarrow 360°\left(\frac{R}{g}\right) = 180°$$

$$\Rightarrow \frac{R}{g} = \frac{1}{2} \qquad ...(1)$$

Luego: $\frac{(2\pi R)(g)}{2} = 18\pi$

$$\Rightarrow \pi Rg = 18\pi \Rightarrow Rg = 18 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2): $R = 3 \wedge g = 6$

En el ◺BOC por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + R^2$

$\Rightarrow (6)^2 = h^2 + (3)^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$

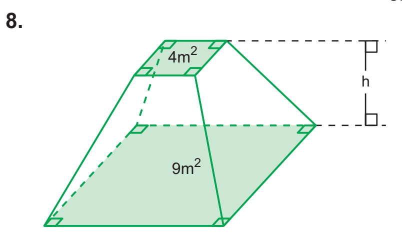
Piden: el volumen del cono (V)

$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi 3^2)(3\sqrt{3})$$

$$\therefore V = 9\sqrt{3}\,\pi\ m^3$$

Clave A

8.



Por dato: h es la media geométrica de las bases.

$\Rightarrow h = \sqrt{(4)(9)} \Rightarrow h = 6$

Piden:

El volumen del tronco de pirámide (V)

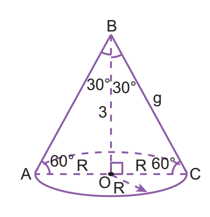
$$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$$

$$\Rightarrow V = \frac{6}{3}(4 + 9 + \sqrt{4.9}) = 2(19)$$

$$\therefore V = 38\ m^3$$

Clave D

9.



Del ◺BOC es notable de 30° y 60°:

$R\sqrt{3} = 3 \quad \wedge \quad g = 2R$

$\Rightarrow R = \sqrt{3} \quad \wedge \quad g = 2\sqrt{3}$

Piden: el volumen del cono (V)

$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2(3)$$

$$\therefore V = 3\pi\ m^3$$

Clave B

Nivel 2 (página 117) Unidad 4

Comunicación matemática

10.

I. (V) Desplaza el vértice paralelo a una arista lateral.

II. (F) La base no puede estar inscrita.

III. (V) Son congruentes (iguales).

IV. (F) No necesariamente, solo en el caso que sean congruentes.

Clave A

11.

I. (V) Por definición.

II. (F) No necesariamente.

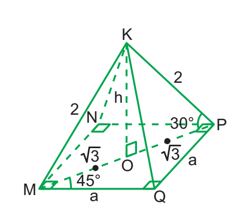
III. (V) Porque todas sus secciones axiales tendrán dos lados iguales.

IV. (F) Si tienen base elíptica tienen secciones axiales diferentes.

Clave C

Razonamiento y demostración

12.



El ◺KOP es notable de 30° y 60°.

Entonces: $h = 1 \wedge OP = \sqrt{3}$

En el ◺MQP que es notable de 45°:

$a\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{6}$

Piden: el volumen de la pirámide (V)

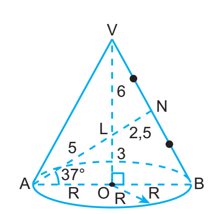
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(a^2)h$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(\sqrt{6}^2)(1) = 2$$

$$\therefore V = 2\ m^3$$

Clave B

13.



Del gráfico: L es baricentro del △AVB

$\Rightarrow AL = 2(LN) \Rightarrow AL = 2(2,5) \Rightarrow AL = 5$

Del ◺AOL es notable de 37° y 53°:

$LO = 3 \wedge R = 4$

Además: $VL = 2(LO) \Rightarrow VL = 2(3) = 6$

Piden: el volumen del cono (V)

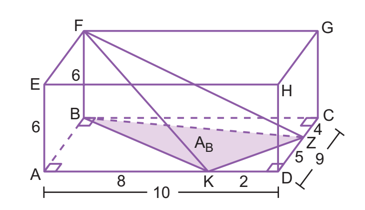
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi.4^2)(9)$$

$$\therefore V = 48\pi\ cm^3$$

Clave E



14.



$A_{\square ABCD} = A_{\Delta BAK} + A_{\Delta KDZ} + A_{\Delta BCZ} + A_B$

$10.9 = \frac{9.8}{2} + \frac{2.5}{2} + \frac{10.4}{2} + A_B$

$90 = 61 + A_B \Rightarrow A_B = 29$

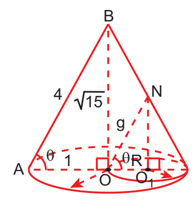
Piden: el volumen de la pirámide F–BKZ

$V_{F-BKZ} = \frac{A_B h}{3} = \frac{(29)6}{3}$

$\therefore V_{F-BKZ} = 58 \text{ m}^3$

Clave B

15.



Por dato: $\overline{AB} // \overline{ON}$

En el ◺AOB por el teorema de Pitágoras: AB = 4

Del gráfico: el ◺AOB ∼ ◺OO_1N

$\Rightarrow \frac{AO}{AB} = \frac{OO_1}{ON} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{R}{g}$

Piden: la medida del ángulo (α) del desarrollo de la superficie lateral del cono menor.

Por propiedad: $\alpha = 360°\left(\frac{R}{g}\right)$

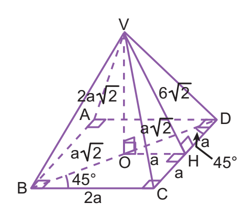
$\Rightarrow \alpha = 360°\left(\frac{1}{4}\right)$

$\therefore \alpha = 90°$

Clave D

Resolución de problemas

16.



Por dato: VO = BD

En el ◺VOH por el teorema de Pitágoras:

$(2a\sqrt{2})^2 + (a)^2 = (6\sqrt{2})^2$

$9a^2 = 72$

$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Piden: el área lateral de la pirámide

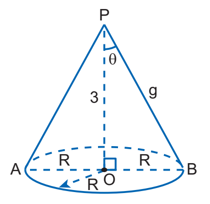
$A_L = (p_{base})Ap = (4a)(6\sqrt{2})$

$\Rightarrow A_L = 4(2\sqrt{2})(6\sqrt{2}) = 96$

$\therefore A_L = 96 \text{ m}^2$

Clave D

17.



Por dato: $A_L = 6\pi \text{ m}^2$

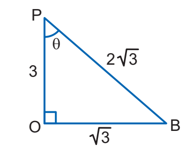
$\Rightarrow \pi Rg = 6\pi \Rightarrow Rg = 6$ ...(1)

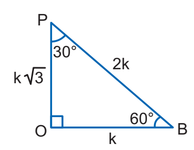
En el ◺POB por el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 3^2 + R^2 \Rightarrow g^2 = 9 + R^2$ ...(2)

De (1) y (2): $R = \sqrt{3} \wedge g = 2\sqrt{3}$

Luego:



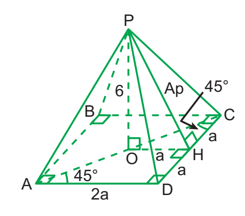


El ◺POB resulta notable de 30° y 60°.

$\therefore \theta = 30°$

Clave B

18.



Por dato: $A_{\square ABCD} = 2(A_{\Delta PCD})$

$\Rightarrow (2a)^2 = 2\left(\frac{2aAp}{2}\right)$

$4a^2 = 2aAp \Rightarrow Ap = 2a$

En el ◺POH por el teorema de Pitágoras:

$(Ap)^2 = a^2 + 6^2$

$(2a)^2 = a^2 + 36 \Rightarrow 3a^2 = 36 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

Piden: el volumen de la pirámide (V)

$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(2a)^2(6)$

$\Rightarrow V = 8a^2 = 8(2\sqrt{3})^2 = 96$

$\therefore V = 96 \text{ m}^3$

Clave C

Nivel 3 (página 118) Unidad 4

Comunicación matemática

19.

I. (V) Se prolonga una generatriz hasta un cierto punto que sería el nuevo vértice del cono oblicuo.

II. (V) En un cono recto.

III. (F) Pueden tener alturas diferentes.

IV. (F) Son 4 como mínimo.

20.

I. (F) Si tienen alturas diferentes no serían semejantes.

II. (V) En un cono irregular.

III. (F) Podrían tener área de las bases iguales pero no necesariamente son congruentes las bases, ejemplo: una base sería elipse y la otra circular.

IV. (F) En las oblicuas, la altura no se proyecta necesariamente en la base.

21.

I. (F) Pirámide no convexa ⇒ base no convexa.

II. (V) Solo traza una altura desde el centroide hasta la generatriz.

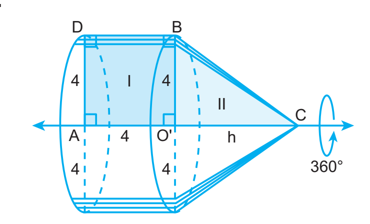
III. (V) Pirámide convexa ⇒ base convexa.

IV. (V) Todo cono tiene sección axial.

Clave B

Razonamiento y demostración

22.



Del gráfico:

La región (I) al girar 360°, genera un cilindro circular recto.

La región (II) al girar 360°, genera un cono circular recto.

Por dato:

$V_{cilin.} = V_{cono}$

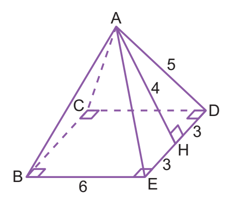
$\pi(4)^2(4) = \frac{1}{3}\pi(4)^2 h$

$3(4) = h$

$\therefore h = 12$

Clave C

23.



En el ◺AHD por el teorema de Pitágoras: AH = 4

Piden: el área lateral de la pirámide

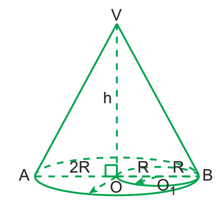
$A_L = (p_{base})(Ap)$

$\Rightarrow A_L = (12)(4) = 48$

$\therefore A_L = 48 \text{ m}^2$

Clave B

24.



Del gráfico: ambos conos tienen la misma altura. Sea:

V_1: el volumen del cono de menor base.

V_2: el volumen del cono de mayor base.

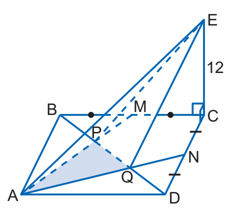
Piden:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\frac{1}{3}\pi(2R)^2 h} = \frac{R^2}{4R^2}$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$

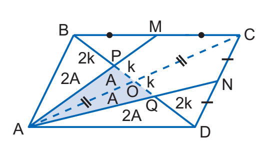
Clave C

25.



Por dato: ABCD es un paralelogramo de 24 m^2 de área.

Luego en la base:



P y Q son los baricentros de los triángulos ABC y ACD, respectivamente.

Por relación de áreas: $A_{\triangle ABD} = \frac{A_{\square}}{2}$

$\Rightarrow 6A = \frac{24}{2} = 12 \Rightarrow A = 2$

Entonces:

$A_{\triangle APQ} = 2A = 2(2) = 4$

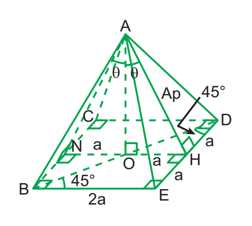
Piden: el volumen de la pirámide E–APQ (V)

$$V = \frac{(A_B)h}{3} = \frac{(A_{\triangle APQ})(12)}{3} = \frac{(4)(12)}{3}$$

$\therefore V = 16\ m^3$

Clave C

26.



Del gráfico: el △NAH es isósceles.

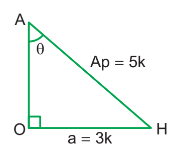
Por dato: $5A_B = 3A_L$

$5(2a)^2 = 3(4a)(Ap)$

$20a^2 = 12a(Ap)$

$\Rightarrow \frac{Ap}{a} = \frac{5}{3}$

Entonces:



El ⊿AOH resulta ser notable de 37° y 53°.

$\Rightarrow \theta = 37°$

Piden: la m∠NAH

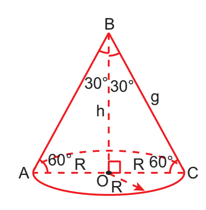
$\Rightarrow$ m∠NAH = 2θ = 2(37°)

$\therefore$ m∠NAH = 74°

Clave E

Resolución de problemas

27.



En el ⊿BOC notable de 30° y 60°:

$h = R\sqrt{3} \quad \wedge \quad g = 2R$

Luego, el ángulo del desarrollo de su superficie lateral será:

$$\alpha = 360°\left(\frac{R}{g}\right) = 360°\left(\frac{R}{2R}\right)$$

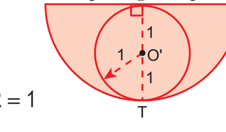
$\Rightarrow \alpha = 180°$

Entonces, el desarrollo de la superficie lateral del cono es un semicírculo.

Por dato:

$\Rightarrow g = 2$

$(2R) = 2 \Rightarrow R = 1$



Piden: el volumen del cono (V)

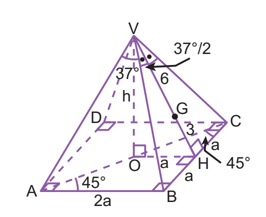
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi R^2)(R\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(1)^3$$

$$\therefore V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\ m^3$$

Clave A

28.



Por dato: G es baricentro del △BVC

$\Rightarrow$ VG = 2(GH)

6 = 2(GH) $\Rightarrow$ GH = 3

En el ⊿VHC es notable de $\frac{37°}{2}$: HC = 3

$\Rightarrow a = 3$

En el ⊿VOH por el teorema de Pitágoras:

$h^2 + a^2 = (9)^2$

$\Rightarrow h^2 + (3)^2 = 81 \Rightarrow h = 6\sqrt{2}$

Piden: el volumen de la pirámide regular (V)

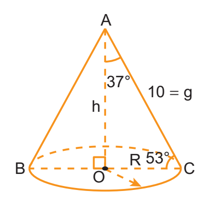
$$V = \frac{1}{3}(A_B)h = \frac{1}{3}(2a)^2(6\sqrt{2})$$

$\Rightarrow V = 8a^2\sqrt{2} = 8(3)^2\sqrt{2}$

$\therefore V = 72\sqrt{2}\ m^3$

Clave A

29.



Del ⊿AOC es notable de 37° de 53°:

R = 3k, h = 4k y g = 5k

Luego: g = 10

5k = 10 $\Rightarrow$ k = 2

$\Rightarrow$ R = 3(2) = 6 ∧ h = 4(2) = 8

Piden: el volumen del cono (V)

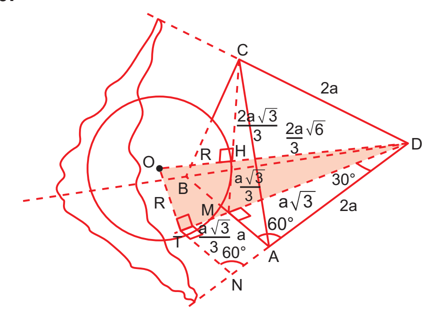
$$V = \frac{1}{3}(\pi R^2)h = \frac{1}{3}(\pi 6^2)(8)$$

$$\Rightarrow V = \frac{288\pi}{3} = 96\pi$$

$\therefore V = 96\pi$

Clave C

30.



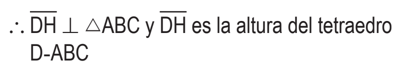
En el tetraedro D-ABC; graficamos una esfera tangente a la cara ABC y tangente a los planos que contienen a las caras DBC, DBA y DCA.

$\therefore$ Dicha esfera está exinscrita, luego trazamos las alturas CM (M ∈ $\overline{AB}$) y $\overline{DM}$ (M ∈ $\overline{AB}$).

Si el lado del tetraedro mide 2a

$\Rightarrow CM = DM = a\sqrt{3}$

Vemos que la esfera es tangente en H al plano ABC, además H pertenece a $\overline{CM}$ y es baricentro del △ABC.



$\therefore \overline{DH} \perp \triangle ABC$ y $\overline{DH}$ es la altura del tetraedro D-ABC

$\Rightarrow DH = \frac{2a}{3}\sqrt{6}$

Además $CH = \frac{2a}{3}\sqrt{3}$ y $HM = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Vemos que la esfera es tangente en T al plano que contiene el $\triangle BDA$.

$\therefore TM = HM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el ⊿OTD:

$$\left(R + \frac{2a}{3}\sqrt{6}\right)^2 = R^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} + a\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow R^2 + \frac{4Ra}{3}\sqrt{6} + \frac{(4)R^2(6)}{9} = R^2 + \frac{16}{9}(3R^2)$$

$$\frac{4aR\sqrt{6}}{3} = \frac{8R^2}{3}$$

$$\Rightarrow a = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

Finalmente hallamos el volumen del tetraedro D-ABC:

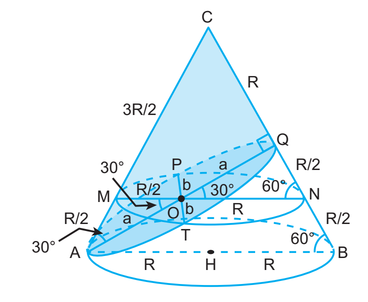
$$V = \frac{1}{3}(2a \times a\sqrt{3})\frac{2a}{3}\sqrt{6}$$

$$V = \frac{2a^3.\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V = \frac{2}{3}\ \frac{R^3}{8}6\sqrt{6}.\sqrt{2}$$

$$\therefore V = \sqrt{3}\,R^3$$

Clave B

31.



El cono equilátero tiene lados iguales a 2R

$\Rightarrow CQ = QB = R$

El plano perpendicular a la generatriz $\overline{CB}$ determina la base elíptica que contiene a $\overline{AQ}$.

$V_{\text{cono oblicuo}} = \frac{1}{3}(A_{\text{elipse}})\,R \quad ...(\alpha)$

Sabemos que: $A_{\text{elipse}} = \pi ab$

En el ⊿ACQ (notable de 30° y 60°); donde:

$AO = QO = a$

Si $CQ = R \Rightarrow AQ = \frac{R}{2}\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad a = \frac{R}{2}\sqrt{3} \qquad ...(1)$

Luego trazamos un plano paralelo a la base del cono y que pase por el medio de la elipse determinando así el segmento PT ($PO = OT = b$)

En la circunferencia que contiene al segmento MN, aplicamos el teorema de las cuerdas:

$b^2 = \frac{R}{2}(R) \Rightarrow b = \frac{R\sqrt{2}}{2} \qquad ...(2)$

Finalmente reemplazamos (2) y (1) en (α):

$$V_{\text{cono oblicuo}} = \frac{1}{3}\left(\pi.\frac{R}{2}\sqrt{3}.\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)R$$

$$V_{\text{cono oblicuo}} = \frac{\pi R^3\sqrt{6}}{12}$$

Pero $R = 2 \Rightarrow \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}\ m^3$

Clave D

APLICAMOS LO APRENDIDO (página 120) Unidad 4

1. Sea R: el radio de la esfera

Por dato:

$A_{\text{círculo máximo}} = 16\pi\ cm^2$

$\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 4$ cm

Piden:

$A_{SE} = 4\pi R^2 = 4\pi(4)^2$

$\therefore A_{SE} = 64\pi\ cm^2$

Clave C

2. Por dato:

$V_E = 121{,}5\pi\ cm^3$

$\frac{4}{3}\pi R^3 = 121{,}5\pi$

$R^3 = 91{,}125 \Rightarrow R = 4{,}5$ cm

Piden:

$A_{SE} = 4\pi R^2 = 4\pi(4{,}5)^2$

$\therefore A_{SE} = 81\pi\ m^2$

Clave A

3. Por dato:

$A_{SE} = 100\pi\ m^2$

$4\pi R^2 = 100\pi \Rightarrow R = 5$ m

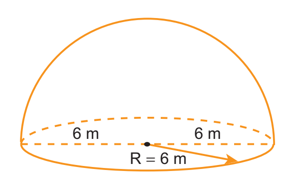
Piden:

$A_{\text{círculo máximo}} = \pi R^2 = \pi(5)^2$

$\therefore A_{\text{círculo máximo}} = 25\pi\ m^2$

Clave C

4.



$A_{\text{cúpula}} = 2\pi R^2 = 2\pi(6)^2 = 72\pi\ m^2$

Piden:

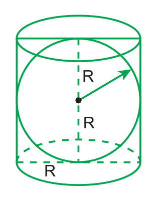
Inversión = $(72\pi)4{,}8 = 345{,}6\pi$

Inversión = $345{,}6(3{,}14)$

$\therefore$ Inversión = \$ 1 085,184

Clave D

5.



Piden:

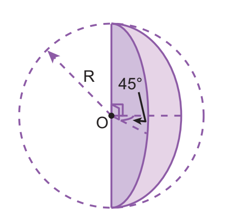
$\frac{A_{SE}}{A_{Tcilin.}} = \frac{4\pi R^2}{2\pi R^2 + 2\pi R(2R)}$

$\frac{A_{SE}}{A_{Tcilin.}} = \frac{4\pi R^2}{2\pi R^2 + 4\pi R^2} = \frac{4\pi R^2}{6\pi R^2}$

$\therefore \frac{A_{SE}}{A_{Tcilin.}} = \frac{2}{3}$

Clave E

6.



Por dato:

$A_{HE} = 18\pi\ m^2$

$\frac{\pi R^2(45°)}{90°} = 18\pi \Rightarrow R = 6$

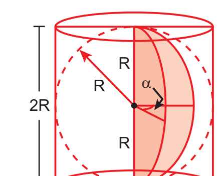
Piden:

$V_{CE} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°} = \frac{\pi 6^3 45°}{270°}$

$\therefore V_{CE} = 36\pi\ m^3$

Clave E

7.



Por dato:

$V_{cilin.} = 54\pi\ m^3$

$\pi R^2(2R) = 54\pi \Rightarrow R^3 = 27$

$\therefore R = 3$

También:

$V_{CE} = \pi\ m^3$

$\frac{\pi R^3 \alpha}{270°} = \pi$

$\frac{3^3 \alpha}{270°} = 1 \Rightarrow \alpha = 10°$

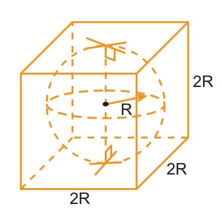
Piden:

$A_{HE} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90°} = \frac{\pi(3)^2 10°}{90°}$

$\therefore A_{HE} = \pi\ m^2$

Clave A

8.



Por dato: la diagonal del cubo mide $6\sqrt{3}$

$\Rightarrow d = 6\sqrt{3}$ m

$(2R)\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow R = 3$

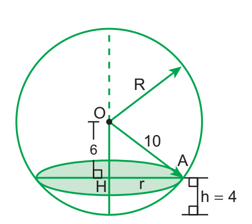
Piden:

$V_E = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi(3)^3}{3}$

$\therefore V_E = 36\pi\ m^3$

Clave D

9.



Por dato:

$A_{CE} = 2\pi Rh = 80\pi$

$Rh = 40$

$(10)h = 40 \Rightarrow h = 4$

En el ◺OHA por el teorema de Pitágoras: r = 8

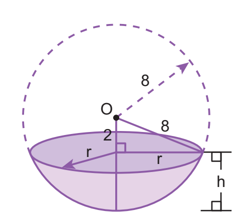
Piden:

$A_{\text{base del casquete}} = \pi r^2 = \pi(8)^2$

$\therefore A_{\text{base de casquete}} = 64\pi\ m^2$

Clave B

10.



Por dato:

$A_{CE} = 96\pi\ m^2$

Entonces:

$2\pi(8)h = 96\pi \Rightarrow h = 6$ m

Del gráfico, por el teorema de Pitágoras:

$8^2 = 2^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 64 - 4 = 60$

$\Rightarrow r = \sqrt{60}$

Piden:

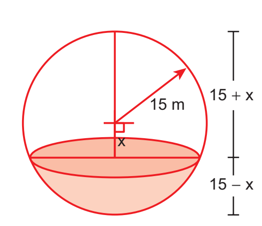
$V_{SE_1} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{\pi 6^3}{6} + \frac{\pi(\sqrt{60})^2 6}{2}$

$\Rightarrow V_{SE_1} = 36\pi + 180\pi$

$\therefore V_{SE_1} = 216\pi\ m^3$

Clave C

11.



Por dato: el área de los casquetes determinados están en proporción de 3 a 2.

Entonces:

$\frac{2\pi(15)(15+x)}{2\pi(15)(15-x)} = \frac{3}{2}$

$2(15 + x) = 3(15 - x)$

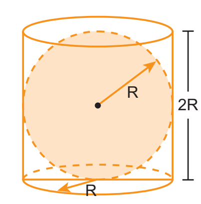
$30 + 2x = 45 - 3x$

$5x = 15$

$\therefore x = 3$ m

Clave B

12.



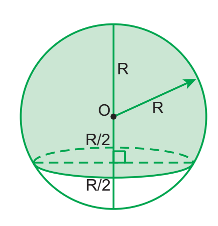
Por dato:
$A_{SE} + A_{T\ cilindro} = 90\pi\ m^2$

Entonces:
$4\pi R^2 + (2(\pi R^2) + 2\pi R(2R)) = 90\pi$
$4\pi R^2 + 6\pi R^2 = 90\pi$
$10\pi R^2 = 90\pi$
$R^2 = 9$
$\Rightarrow R = 3$

Piden:
$V_E = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = \dfrac{4\pi}{3}(3)^3$
$\therefore V_E = 36\pi\ m^3$

Clave E

13.

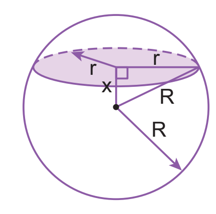


Por dato:
$V_E = 4\sqrt{3}\ \pi\ m^3$
$\dfrac{4\pi}{3}R^3 = 4\sqrt{3}\ \pi$
$R^3 = 3\sqrt{3} \Rightarrow R^6 = 27$
$\Rightarrow R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3}$

Sea A_{CE}: el área del mayor casquete esférico
$A_{CE} = 2\pi Rh = 2\pi R\left(\dfrac{3R}{2}\right) = 3\pi R^2$
$\therefore A_{CE} = 3\pi(\sqrt{3})^2 = 9\pi\ m^2$

Clave C

14. Graficamos la esfera y el círculo menor.



Del dato:
Longitud de la circunferencia menor:
$2\pi\ r = 20,724$
$r = \dfrac{20,724}{2(3,14)} = 3,3\ \ cm$

Área de la esfera:
$4\pi\ R^2 = 379\ 94$
$R = \sqrt{\dfrac{379,94}{4(3,14)}} = 5,5\ \ cm$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:
$x^2 + r^2 = R^2$
$x^2 = (5,5)^2 - (3,3)^2$
$\therefore\ x = 4,4\ cm$

Clave B

PRACTIQUEMOS
Nivel 1 (página 122) Unidad 4

Comunicación matemática

1.

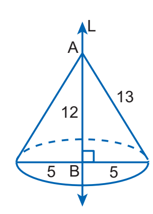
2.
I. (F) porque, no puede ser secante.
II. (F) porque, genera un sector esférico.
III. (F) porque, genera un anillo esférico.
IV. (F) porque, genera una zona esférica.

3.
I. (F) porque tienen que ser coplanares.
II. (V) porque forman 2 conos de revolución con un mismo vértice.
III. (V) porque es coplanar y no secante.
IV. (F) porque solo generan sólidos de revolución las regiones coplanares.

Clave C

Razonamiento y demostración

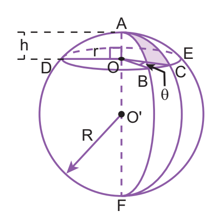
4.



$V = \dfrac{1}{3}\pi(5^2)12 = 100\pi$

Clave E

5. Por dato: $2\pi r = 10 \Rightarrow r = \dfrac{5}{\pi}$ ... (1)



Por el teorema de las cuerdas en la circunferencia máxima de la esfera:
$r^2 = h(2R - h)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) y R = 2 (dato):
$h^2 - 4h + \dfrac{25}{\pi^2} = 0$

De donde: $h = \begin{cases} 3,21 \\ 0,79 \end{cases}$

Luego: h = 0,79 m ... (α)

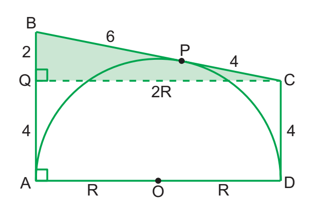
Además; si:
$360°$ ———— $2\pi Rh$
θ ———— S_{ABC}

$\Rightarrow\ S_{ABC} = \dfrac{2\pi Rh\theta}{360°}$ ... (β)

Reemplazando (α) en (β):
$S_{ABC} = \dfrac{2(3,14)(2)(0,79)(26°)}{360°}$
$\therefore\ S_{ABC} = 0,7165\ m^2$

Clave B

6. Sea el gráfico del plano ABCD:



En el triángulo rectángulo BQC:
$10^2 = 2^2 + (2R)^2$
$\Rightarrow\ R = 2\sqrt{6}$

Luego el volumen del tronco de cilindro será:
$V = \pi R^2 e$

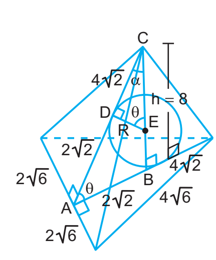
Donde: $e = \dfrac{AB + CD}{2}$

Luego: $V = \pi(2\sqrt{6})^2\left(\dfrac{6+4}{2}\right)$
$V = 120\ \pi\ m^3$

Clave C

Resolución de problemas

7.

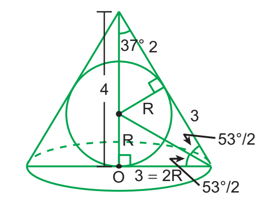


Del gráfico:
$\triangle CBA \sim \triangle CDE$
$\dfrac{8}{4\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{R} \Rightarrow R = 2$

Piden:
$A_{SE} = 4\pi R^2 = 4\pi(2)^2$
$\therefore\ A_{SE} = 16\pi\ m^2$

Clave B

8.



Del gráfico:

$3 = 2R \Rightarrow R = \frac{3}{2}$

Piden:

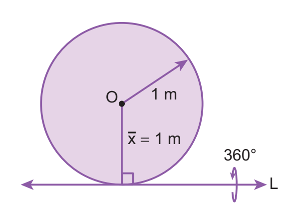
$V_E = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\Rightarrow V_E = \frac{4(27)\pi}{3(8)}$

$\therefore V_E = 4{,}5\pi \text{ m}^3$

Clave C

9.



Por dato:

$R = 1$ m

$\Rightarrow \bar{x} = 1$ m

Luego:

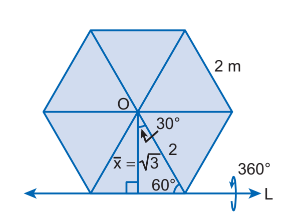
$A_{\odot} = \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi \text{ m}^2$

Por el teorema de Pappus-Gulding:

$V_{SG} = A(2\pi\bar{x}) = \pi(2\pi 1) = 2\pi^2 \text{ m}^2$

Clave B

10.



Sea A: el área del hexágono

$\Rightarrow A = 6\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\Rightarrow A = 6\sqrt{3}$

Por el teorema de Pappus-Gulding:

$V_{SG} = A(2\pi\bar{x})$

$\Rightarrow V_{SG} = 6\sqrt{3}\,(2\pi\sqrt{3}\,)$

$\therefore V_{SG} = 36\pi \text{ m}^3$

Clave C

Nivel 2 (página 123) Unidad 4

Comunicación matemática

11.

12.

I. (F) por ser oblicuo.

II. (F) si la base no es un círculo, entonces no es un cilindro de revolución.

III. (V) por definición.

IV. (F) porque solo es sólido de revolución para un cilindro recto de base circular.

Clave C

13.

I. (F) por ser oblicuo.

II. (F) Si la base no es un círculo, entonces no es un cono de revolución.

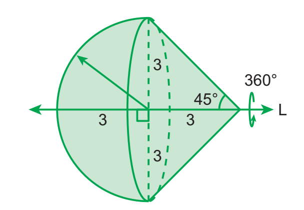
III. (V) por definición.

IV. (F) porque solo es sólido de revolución para un cono recto de base circular.

Clave D

Razonamiento y demostración

14.



Piden:

$V_G = V_{semiesfera} + V_{cono}$

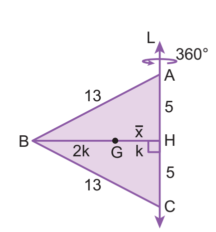
$\Rightarrow V_G = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3}3^3\right) + \frac{1}{3}(\pi 3^2)(3)$

$V_G = 18\pi + 9\pi$

$\therefore V_G = 27\pi \text{ m}^3$

Clave B

15.



En el ◺AHB por el teorema de Pitágoras:

$13^2 = 5^2 + (3k)^2$

$169 = 25 + 9k^2$

$144 = 9k^2 \Rightarrow k^2 = 16$

$k = 4$

Luego: $\bar{x} = k = 4$

Sea A: el área del $\triangle ABC$

$\Rightarrow A = \frac{10(3k)}{2} = 15k = 15(4)$

$\Rightarrow A = 60 \text{ m}^2$

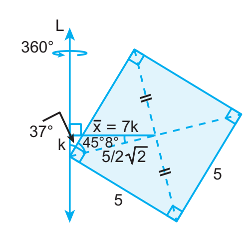
Por el teorema de Pappus–Gulding:

$V_{SG} = A(2\pi\bar{x}) = 60(2\pi 4)$

$\therefore V_{SG} = 480\pi \text{ m}^3$

Clave E

16.



Por el teorema de Pitágoras:

$k^2 + (7k)^2 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2$

$50k^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

Luego:

$\bar{x} = 7k = 7\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$

Sea A: el área del cuadrado

$\Rightarrow A = 5^2 = 25 \text{ m}^2$

Por el teorema de Papus-Gulding:

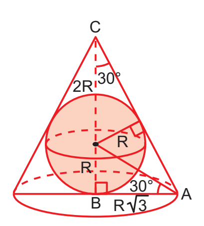
$V_{SG} = A(2\pi\bar{x}) = 25\left(2\pi\frac{7}{2}\right)$

$\therefore V_{SG} = 175\pi \text{ m}^3$

Clave D

Resolución de problemas

17.



Por dato:

$V_{cono} = 648\pi \text{ m}^3$

$\frac{1}{3}\pi(R\sqrt{3}\,)^2 3R = 648\pi$

$3R^3 = 648$

$R^3 = 216 \Rightarrow R = 6$

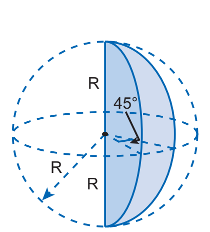
Piden:

$A_{SE} = 4\pi R^2 = 4\pi(6)^2$

$\therefore A_{SE} = 144\pi \text{ m}^2$

Clave C

18.



Por dato:

$V_{CE} = \frac{32}{3}\pi \text{ m}^3$

$\frac{\pi R^3 45°}{270°} = \frac{32}{3}\pi \Rightarrow R^3 = 64$

$\Rightarrow R = 4$

Sea A: el área total de la cuña.

$\Rightarrow A = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2 \alpha}{90°}$

$A = \pi(4)^2 + \frac{\pi(4^2)45°}{90°} = 16\pi + 8\pi$

$\therefore A = 24\pi \text{ m}^2$

Clave D



19. Piden:

$V_{SE2} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r_1^2 h}{2} + \frac{\pi r_2^2 h}{2}$

$V_{SE2} = \frac{h}{2}\left[\frac{\pi}{3}h^2 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2\right]$

Por dato:

$h = 6 \wedge \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 20\pi$

$\Rightarrow V_{SE2} = \frac{6}{2}\left[\frac{\pi}{3}6^2 + 20\pi\right] = 3[12\pi + 20\pi]$

$\therefore V_{SE2} = 96\pi\ m^3$

Clave D

20. Del enunciado:

$A_{casquete\ esférico} = A_{huso\ esférico}$

$2\pi Rh = \frac{\pi R^2 \theta}{90°} \Rightarrow \frac{180°h}{R} = \theta$

Además: $h = \frac{R}{4}$

Entonces:

$\frac{180°\left(\frac{R}{4}\right)}{R} = \theta$

$\therefore \alpha = 45°$

Clave B

Nivel 3 (página 123) Unidad 4

Comunicación matemática

21.

I. (F) porque tienen que ser coplanares.
II. (V) por definición.
III. (F) porque genera un plano.
IV. (F) porque genera un plano.

Clave C

22.

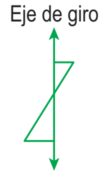
I. (F) no tiene que ser secante.
II. (F) porque no tiene que ser secante.
III. (F) porque para que sea superficie de revolución debe de girar 360°.
IV. (V) porque, forma un sólido, pero no un sólido de revolución.

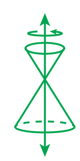
Clave C

23.

I. (F), porque es secante.
II. (V)

Eje de giro

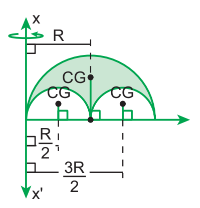




III. (V) por definición de sólido no convexo (por un sólido pasa una recta que interseca a un sólido en más de 2 puntos).
IV. (F) genera una superficie de revolución.

Razonamiento y demostración

24.



Sea: "V" el volumen generado al rotar por el semicírculo de radio R.

Además: V_1 y V_2 los volúmenes generados al rotar por los semicírculos de radios R/2.

Luego el volumen pedido será V_x:

$V_x = V - (V_1 + V_2)$

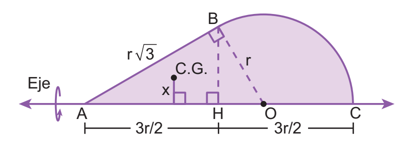
Por el teorema de Pappus y Guldin

$V_x = 2\pi R\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) - \left[\pi R\left(\frac{\pi R^2}{8}\right) + 3\pi R\left(\frac{\pi R^2}{8}\right)\right]$

$\therefore V_x = 4\pi^2\ m^3$

Clave C

25. Dato: AC = 3



Del gráfico: $\frac{3r}{2} + \frac{3r}{2} = 3 \Rightarrow r = 1$ y $x = \frac{r}{6}\sqrt{3}$

Si: V_1 = volumen del sector esférico generado por el sector circular BOC

V_2 = volumen del sólido generado por la región triangular ABO

V_x = volumen pedido

Por el teorema de Pappus y Guldin:

$V_2 = 2\pi S_{ABO}$

Luego: $V_x = V_1 + V_2$

$V_x = \frac{2}{3}\pi r^2\left(\frac{3r}{2}\right) + 2\pi x S_{ABC}$

$V_x = \pi r^3 + 2\pi\left(\frac{r}{6}\sqrt{3}\right)\left(\frac{r^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$V_x = 3\pi r^3/2$

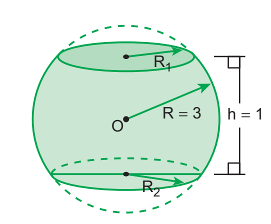
Pero: r = 1 m

$\therefore V_x = \frac{3\pi}{2}\ m^3$

Clave B

Resolución de problemas

26.



Por dato:

$\pi R_1^2 + \pi R_2^2 + 2\pi Rh = 11\pi$

$R_1^2 + R_2^2 + 2(3)(1) = 11$

$\Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = 5$ ...(1)

Además:

$R_2 - R_1 = 1 \Rightarrow R_2 = 1 + R_1$ ... (2)

Reemplazando (2) en (1):

$R_1^2 + (1 + R_1)^2 = 5$

$2R_1^2 + 2R_1 - 4 = 0$

$R_1^2 + R_1 - 2 = 0$

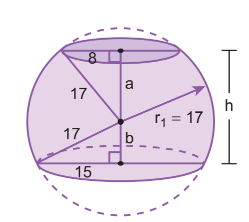
R_1 +2
R_1 −1 $\Rightarrow R_1 = 1$

Reemplazando el valor de R_1 en (2):

$R_2 = 1 + (1) \Rightarrow R_2 = 2$ cm

Clave C

27.



Por el teorema de Pitágoras:

$17^2 = 8^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 289 - 64 = 225$

$\Rightarrow a = 15$

$17^2 = 15^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 289 - 225 = 64$

$\Rightarrow b = 8$

Luego: h = a + b = 23

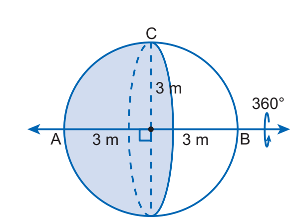
Piden:

$A_{ZE} = 2\pi Rh = 2\pi(17)(23)$

$\therefore A_{ZE} = 782\pi\ m^2$

Clave C

28.



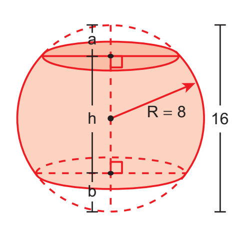
Piden volumen de la semiesfera:

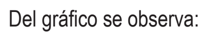
$V_G = \frac{1}{2}\left[\frac{4\pi}{3}.R^3\right]$

$V_G = \frac{2}{3}\pi(3)^3 \Rightarrow V_G = 18\pi\ m^3$

Clave B

29.





Del gráfico se observa:

$a + h + b = 16$

$\Rightarrow a + b = 16 - h$ ... (1)

Además, por dato:

$$A_{ZE} = \frac{3}{5}(A_{CE_1} + A_{CE_2})$$

$$2\pi Rh = \frac{3}{5}(2\pi Ra + 2\pi Rb)$$

$\Rightarrow 5h = 3(a + b)$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2):

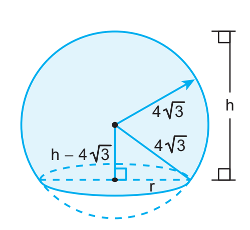
$5h = 3(16 - h)$

$5h = 48 - 3h$

$8h = 48 \Rightarrow h = 6$ m

Clave A

30.



Por dato:

$$A_{CE} = 4A_{base}$$

$$2\pi Rh = 4(\pi r^2)$$

$$2\pi(4\sqrt{3})\,h = 4\pi r^2$$

$\Rightarrow 2\sqrt{3}\,h = r^2$ ... (1)

Además, por el teorema de Pitágoras:

$$(4\sqrt{3})^2 = (h - 4\sqrt{3})^2 + r^2$$

$$48 = h^2 - 8\sqrt{3}\,h + 48 + r^2$$

$\Rightarrow 8\sqrt{3}\,h = h^2 + r^2$ ... (2)

Reemplazando (1) en (2) se obtienen:

$h = 6\sqrt{3} \ \wedge \ r = 6$

$$V_{SE_S} = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + r^2\right)$$

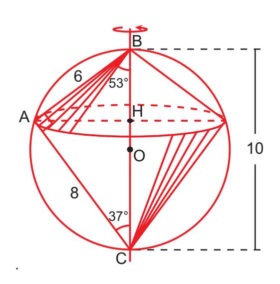
$$V_{SE_S} = \frac{\pi 6\sqrt{3}}{2}\left(\frac{(6\sqrt{3})^2}{3} + 6^2\right) = 3\sqrt{3}\,\pi(72)$$

$\therefore V_{SE_S} = 216\sqrt{3}\,\pi$ m^3

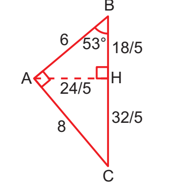
Clave D

MARATÓN MATEMÁTICA (página 125) Unidad 4

1.



En el $\triangle ABC$; por triángulo notable: $BC = 10$



$AH = 24/5$

$BH = 18/5$

$HC = 32/5$

$$\text{Volumen del sólido} = \frac{\pi\left(\frac{24}{5}\right)^2 \times 10}{3} = \frac{384\pi}{5}\ \text{m}^3$$

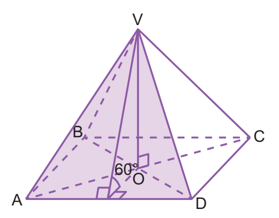
$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4\pi}{3}(5)^3 = \frac{500\pi}{3}\ \text{m}^3$$

$\therefore$ Volumen pedido = Vol. esf – Vol. sólido

$$= \frac{500\pi}{3} - \frac{384}{5}\pi = \frac{1348}{15}\pi$$

Clave C

2.



Por dato:

$A_{\triangle AVD} + A_{\triangle BVC} = 40$ cm^2

Pero: $A_{\triangle AVD} = A_{\triangle BVC}$

$\Rightarrow A_{\triangle AVD} = 20$ cm^2

Por propiedad de diedros:

$A_{\triangle AOD} = \cos 60°(A_{\triangle AVD})$

$\Rightarrow A_{\triangle AOD} = \left(\frac{1}{2}\right)20$ cm$^2 = 10$ cm^2

Por propiedad de paralelogramos:

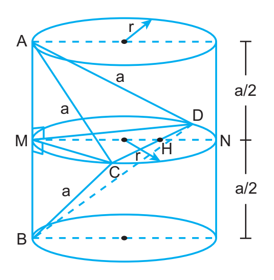
$S_1 = S_2 = S_3 = S_4$

$\therefore A_{\square ABCD} = A_{\triangle AOD} \times 4$

$= 10$ cm$^2 \times 4 = 40$ cm^2

Clave A

3.



En todo tetraedro regular sus aristas opuestas son ortogonales ($\overline{AB} \perp \overline{OC}$) $\Rightarrow$ la arista AB es perpendicular al plano de la sección CDM.

Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ intersecando en H:

$\Rightarrow CH = HD = \frac{a}{2}$

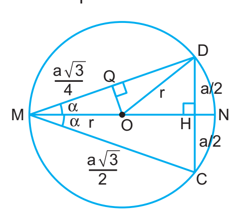
$AM = MB = \frac{a}{2}$

Volumen del cilindro = $(\pi r^2) \times a$, halla "r".

Del tetraedro: $CM = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Q es punto medio de $\overline{MD}$:

$\Rightarrow MQ = QD = \frac{a\sqrt{3}}{4}$



Del triángulo MHC:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{... (1)}$$

En el triángulo MQO:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{r} \quad \text{... (2)}$$

(1) = (2):

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

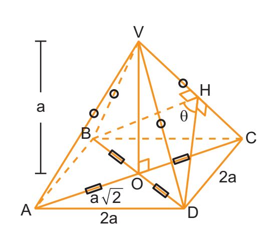
$$\Rightarrow r = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$$

$$\therefore \text{Volumen del cilindro} = \pi r^2 \times a = \pi\left(\frac{3a\sqrt{2}}{8}\right)^2 \times a$$

$$= \frac{9\pi}{32}a^3$$

Clave D

4.



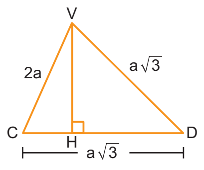
Hallamos la arista lateral:

$AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = OC = a\sqrt{2}$

Del $\triangle AOV$:

$$AV = \sqrt{AO^2 + OV^2} = a\sqrt{3}$$

Halla las alturas DH y BH, por ser pirámide regular DH = BH.



$$DV^2 = DC^2 + CV^2 - 2CV \cdot CH$$

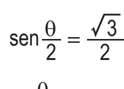


$3a^2 = 4a^2 + 3a^2 - 2a\sqrt{3}\,CH$

$CH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow DH = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\;a = BH$

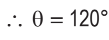
En el triángulo BHD:

$\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{BD}{BH} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{2a}{3}\sqrt{6}}$

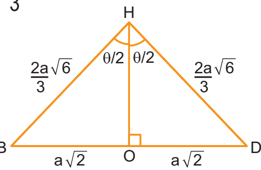


$\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\theta}{2} = 60°$

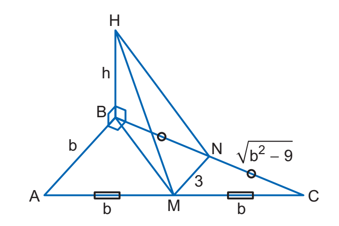


$\therefore\ \theta = 120°$



Clave C

5.



Por dato:

$A_{\Delta BHM} = \dfrac{b \times h}{2} = 10\sqrt{5}\ \ m^2$ ...(1)

$A_{\Delta BHN} = \dfrac{h\sqrt{b^2-9}}{2} = 20\ m^2$ ...(2)

Dividiendo (1) y (2):

$\dfrac{A_{\Delta BHN}}{A_{\Delta BHM}} = \dfrac{\dfrac{h\sqrt{b^2-9}}{2}}{\dfrac{b \times h}{2}} = \dfrac{20}{10\sqrt{5}}$

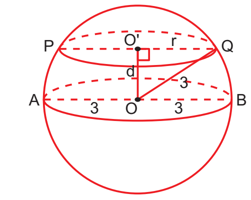
$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{b^2-9}}{b} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow b = 3\sqrt{5}$

Piden: $AC = 2b = 6\sqrt{5}\ \ m$

Clave E

6.



$\overline{AB}$: diámetro de la sección circular mayor

Área circular de diámetro PQ $= \dfrac{1}{3} \times$ (área circular de diámetro AB)

$\Rightarrow \pi r^2 = \dfrac{1}{3}\pi 3^2 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

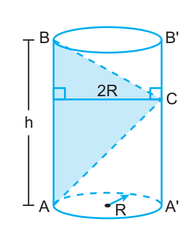
Del triángulo OO'Q;

$d^2 = OQ^2 - r^2 \Rightarrow d = \sqrt{9-3}$

$\therefore\ d = \sqrt{6}\ \ cm$

Clave D

7.



En el triángulo ABC:

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{h \times 2R}{2} = a$

$\Rightarrow h \times R = a$

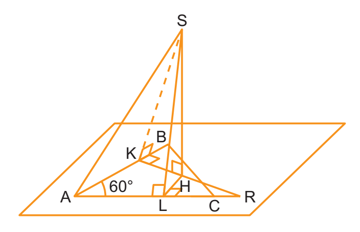
Del cilindro:

$A_L = 2\pi R\,.\,h$

$\therefore\ A_L = 2\pi a$

Clave E

8.



Datos:
AS = 25
SK = 7
SL= 20
Piden: SH = ?

Del triángulo ASL: por Pitágoras AL = 15
Del triángulo ASK: por Pitágoras AK = 24
Por el teorema de las tres perpendiculares:
$m\angle AKH = m\angle ALH = 90°$

En el ΔAKR (Triángulo notable):
$AR = 48$; $LR = 33 \Rightarrow$ en el ΔLHR: $LH = 11\sqrt{3}$
En el ΔLSH; por Pitágoras:

$SH = \sqrt{20^2 - (11\sqrt{3})^2} = \sqrt{37}\ \ cm$

Clave A